

Exercice 5.

$(X_n)_{n \geq 1}$ v.a.i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$

1. D'après l'exercice 1 fiche 2,

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}] = e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

Les v.a. X_i étant i.i.d.,

$$\begin{aligned}\varphi_{S_n}(t) &= \mathbb{E}[e^{itS_n}] \\ &= \mathbb{E}[e^{itX_1} \dots e^{itX_n}] \\ &= \varphi_{X_1}(t)^n = e^{-n\lambda(1-e^{it})}\end{aligned}$$

donc $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$

$$\begin{aligned}P[S_n \leq n] &= P\left[\bigcup_{k=0}^n \{S_n = k\}\right] \\ &= \sum_{k=0}^n P(S_n = k) \\ &= e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{(n\lambda)^k}{k!}.\end{aligned}$$

2. On pose $Z_n = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$

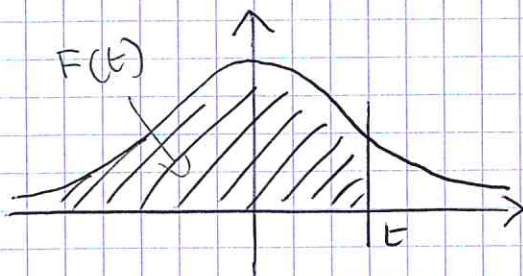
Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X_1) = \text{Var}(X_1) = \lambda$.

D'après le théorème central limite,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

autrement dit $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$P[Z_n \leq t] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = F(t)$$



$$3. \quad \mathbb{P}[S_n \leq n] = \mathbb{P}\left[Z_n \leq \frac{n(1-d)}{\sqrt{nd}}\right]$$

$$= \mathbb{P}[Z_n \leq 0] \text{ si on choisit } d=1.$$

D'après la question 2-

$$\mathbb{P}[Z_n \leq 0] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$$

Donc,

$$\boxed{\mathbb{P}[S_n \leq n] = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 6.

1- Soit $X \sim \frac{1}{2} (S_{-1} + S_1)$ (Lai de Rademacher)

On choisit $(X_n, Y_n) = ((-1)^n X, X)$

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

$$\text{mais } X_n + Y_n = \begin{cases} 2X & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ne converge}$$

pas en loi.

2- On peut choisir $Z_n = (-1)^n X$ avec $X \sim \mathcal{L}^p(0,1)$
 $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ (en fait, $\forall n, Z_n \sim \mathcal{L}^p(0,1)$).

$$\text{Or } Z_n - X = \begin{cases} -2X & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \quad \text{ne converge pas}$$

en probabilité vers 0 donc elle ne converge pas en loi vers 0.

$$3- \left. \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \end{array} \right\} \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c?$$

On utilise le théorème de P. Lévy.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n + Y_n}(t) - \varphi_{X+c}(t) &= \mathbb{E}[e^{it(X_n + Y_n)}] - \mathbb{E}[e^{it(X+c)}] \\ &= e^{itc} \cdot \mathbb{E}[(e^{itX_n} - e^{itX})] \\ &\quad + \mathbb{E}[(e^{itY_n} - e^{itc}) e^{itX_n}] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\varphi_{X_n+Y_n}(t) - \varphi_{X+c}(t)| &\leq |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| \\ &\quad + \mathbb{E} [|e^{itY_n} - e^{itc}|]. \end{aligned}$$

* La fonction $g: y \rightarrow |e^{ity} - e^{itc}|$ est continue,

bornée par 2 donc $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ implique que

$$\mathbb{E}[g(Y_n)] = \mathbb{E}[|e^{itY_n} - e^{itc}|] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$* X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Rightarrow \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi_X(t)$$

$$\text{donc } \varphi_{X_n+Y_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi_{X+c}(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X + c.$$

Exercice 7.

1- On note p = proportion de votants en faveur de A.

On souhaite estimer p .

Pour tout $i \geq 1$, on définit

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ votant est en faveur de A.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si les votants sont choisis indépendamment et uniformément, la suite $(X_i)_{i \geq 1}$ est i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p .

D'après la LFGN, la moyenne empirique

$$m_n(\omega) = \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} \quad \text{est un estimateur de } p.$$

2- D'après le TCL, $\forall x > 0$ si $S_n = X_1 + \dots + X_n$,

$$\mathbb{P} \left[|m_n - p| > \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} \right] = \mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n - np}{\sigma \sqrt{n}} \right| > x \right]$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy = 2(1 - F(x)).$$

Table statistique de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ donne :

$$2(1 - F(x)) = 0,05 \quad \text{si } x = 1,96.$$

Pour n assez grand, p enven connue en assimilant m_n à p sera au plus de

$$\frac{1,96\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{avec une probabilité}$$

égale à 95%. D'où, l'intervalle de confiance pour p à 95% :

$$I := \left[\frac{55}{100} - \frac{1,96 \sqrt{\sigma}}{\sqrt{250}}, \frac{55}{100} + \frac{1,96 \sqrt{\sigma}}{\sqrt{250}} \right]$$

σ est inconnue (en fait, $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$!)

on peut la remplacer par $\frac{1}{2}$.

D'où,

$$I \subseteq \left[\frac{55}{100} - \frac{1,96 \times 0,5}{\sqrt{250}}, \frac{55}{100} + \frac{1,96 \times 0,5}{\sqrt{250}} \right]$$

$$= [0,49 ; 0,61].$$

Intervalle de confiance asymptotique pour
 p à 95%.