

---

**Feuille de TD 1**

Théorème de transfert, Lois, Fonction de répartition.

---

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Exercice 1**

Soit  $X : \Omega \longrightarrow \{-2, 1\}$  une v. a. de loi  $\mathbb{P}_X = (1/3)\delta_{-2} + (2/3)\delta_1$ .

1. Calculer  $\mathbb{E}(|X|)$ .
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{E}(X^n)$  existe et calculer sa valeur.
3. Soit  $n \geq 1$  un entier fixé, on note  $Y = X^n + 1$ . Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire de Bernoulli et explicitez sa loi. En déduire  $\mathbb{E}(Y^2)$ .

**Exercice 2**

Soit  $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$  une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

1. On fixe  $a > 0$ . Calculer  $\mathbb{E}(U^a)$ .
2. On fixe  $a > 0$  puis on note  $V = U^a$ . Explicitez la loi de la v. a.  $V : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ .
3. En déduire  $\mathbb{E}(V^2)$ .

**Exercice 3**

Soit  $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$  de loi uniforme. Donnez la loi de la v.a.  $X = (-2) \times \mathbf{1}_{[0,1/3]}(U) + \mathbf{1}_{]1/3,1]}(U)$ .

**Exercice 4**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathbb{P}_X(dx) = \alpha x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx$ .

1. Calculer  $\alpha$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\mathbb{E}X^n$ .

**Exercice 5**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = (1 - p)p^n.$$

1. Calculer la probabilité que  $X$  soit paire.
2. Calculer pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{E}(e^{-tX})$ .

**Exercice 6 Loi de Weibull, Loi de Gumbel**

Soit  $\lambda > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de loi

$$\mathbb{P}_X(dx) = \frac{2}{\lambda^2} x e^{-(x/\lambda)^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)dx.$$

On l'appelle la loi de Weibull de paramètre  $(2, \lambda)$ .

1. Calculer sa fonction de répartition  $F_X$ . En déduire la probabilité  $\mathbb{P}(X^2 \leq 1)$ .
2. Expliciter la loi de  $Y = X^2$ .

3. Expliciter la loi de  $Z = -\log(X)$ .

### Exercice 7

Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Explicitez la loi de  $\frac{1}{U}$  et celle de  $U^2$ .

### Exercice 8

Soit  $Z$  une variable aléatoire positive.

1. (Inégalité de Markov) Soit  $a > 0$ . Montrer que

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}.$$

2. On suppose que  $Z$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Z \geq n)$ .