Feuille de TD 3

Lemmes de Borel-Cantelli, Convergences p.s., en probabilité, dans L^p, LFGN

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Lemme de Borel-Cantelli - Convergence p.s.
On rappelle que si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, alors

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Soit X_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles.

1. Montrer que si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, les deux événements $\limsup_n A_n$ et $\{$une infinité des A_n est réalisée$\}$ sont égaux.
2. Supposons que les v.a. X_n, $n \geq 1$ sont indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0).$$
   (a) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \to 0$.
   (b) Montrer que
   $$\left\{X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} = \left(\limsup_n \{X_n = 1\}\right)^c.$$
   (c) Montrer que X_n converge p.s. vers 0 si et seulement si $\sum_n p_n < \infty$.

Exercice 2
Montrer que, dans une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie identique, la séquence PFP (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. À l'aide de la loi faible des grands nombres, donner la fréquence d'apparition de cette séquence (on pourra rassembler les variables en paquets de variables indépendantes).

Exercice 3
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on définit les événements $A_n = \{U \leq \frac{1}{n}\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et déterminer l'ensemble $\limsup_n A_n$.
2. En déduire un contre-exemple du second lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 4 Convergence L^p
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. de loi :

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 mais qu'elle ne converge pas dans L^2 vers 0.

Exercice 5 LGN faible pour une suite de v.a. dépendantes

Étant donné une suite de variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ \cdots, X_n, \cdots$, supposons que

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[X_n X_m] = f(n-m), \forall 1 \leq m \leq n,$$

où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que $f(k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Montrer que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{en probab}} 0.$$

Exercice 6

Déterminer, sans calcul, les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) dx_1...dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p \in [0,1]$.
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.