Feuille de TD 4

Convergence en loi

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1

1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers X alors, pour toute fonction continue g, $(g(X_n))_n$ converge en loi vers $g(X)$.
2. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire constante c, alors la convergence a aussi lieu en probabilité.
3. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité (et donc pas presque sûrement).
   Indication : utiliser par exemple X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $-X$, qui a même loi.

Exercice 2

Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < n \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une variable aléatoire X_n de fonction de répartition F_n. Est-ce que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi ?

Exercice 3

Soient $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $n \min(X_1, \dots, X_n)$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.

Exercice 4 : Convergence du maximum de variables aléatoires

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Montrer la convergence en probabilité suivante :
$$\frac{1}{\ln n} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}.$$
2. Démontrer que la suite de variables aléatoires
$$\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$$
   converge en loi vers une limite à déterminer.