# Feuille de TD 6

Test de Kolmogorov-Smirnov, simulation de variables aléatoires

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

## Exercice 1

Un calculateur a simulé un échantillon de $n = 10$ valeurs distribuées selon une loi Normale. Les valeurs $X_i$ produites sont rangées par ordre croissant :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 10.8 | 10.9 | 11.9 | 13.5 | 15.9 | 16.6 | 17.4 | 17.9 | 18.7 | 23 |

On va chercher à vérifier si cet échantillon est correct.

1. Donner une estimation de la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.
2. Calculer, au moyen d'une table de la loi Normale, les valeurs de la fonction de répartition F pour l'échantillon.
3. Exécuter un test de Kolmogorov-Smirnov au seuil de 5% pour décider si la distribution de l'échantillon est en adéquation avec la loi Normale.

## Exercice 2

Détailler une méthode pour simuler (à partir d'une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$),

1. Une variable aléatoire $X_1$ de densité donnée par $f_1(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Une variable aléatoire $X_2$ de densité donnée par $f_2(x) = 3(1-x)^2 \mathbb{1}_{x\in[0,1]}$.
3. Une variable aléatoire $X_3$ de densité donnée par $f_3(x) = \frac{1}{3}(e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}})\mathbb{1}_{x\geq 0}$.
4. Une variable aléatoire $X_4$ de loi donnée par $\mu_4(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

## Exercice 3

On cherche une nouvelle façon de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle la densité de la loi $\Gamma(n, \lambda)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$f_{\Gamma(n,\lambda)}(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x\geq 0}.$$

On rappelle aussi que la fonction caractéristique d'une loi $\Gamma(n, \lambda)$ vaut

$$\psi(t) = \Big(\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}}\Big)^n.$$

1. Montrer que si $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, avec $X_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $Z_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Z_n > t) - \mathbb{P}(Z_{n+1} > t)$.
3. En déduire une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda$.[1]

1. Indication : On pourra définir $N_t = \inf\{n \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} X_i > t\}$.