Partiel du 13 novembre 2018 - Durée : 1 h 30 mn

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Questions de cours. *On attend une rédaction parfaite, tout oubli sera sanctionné.*
1 - Enoncer le théorème central limite.
2 - Définition de la convergence en loi.

Exercice 1. Etant donné un réel $a > 0$, on dit que X suit une loi de Pareto de paramètre a si $X = \exp(Z)$ où Z suit une loi exponentielle de paramètre a.

(1) (a) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t^a} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

(b) En déduire que X admet une densité de probabilité f_X et en donner une expression.

(2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur a assurant que X admette un moment d'ordre k.

(b) Sous cette condition, calculer ce moment d'ordre k.

(3) Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X et qui suit aussi la loi de Pareto de paramètre a. Démontrer que la variable aléatoire $W = \min(X, Y)$ suit encore une loi de Pareto dont on déterminera le paramètre.

(4) Donner la loi de $V = XY$.

Exercice 2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$