Partiel du 4 mars 2016 - Durée : 2 heures

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Question de cours : Enoncer la loi forte des grands nombres.

Exercice 1. (1) On dit qu'une v.a. X est de loi Gaussienne centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si la loi de X a la densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(a) Quelle est la loi de $Y = |X|$?
(b) Calculer l'espérance et la variance de Y.

(2) Pour $a > 0$, on pose $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x$. On dit qu'une v.a. X est de loi Gamma $\Gamma(a, \lambda)$ si la loi de X a la densité

$$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

(a) Vérifier que $\Gamma(a)$ est défini pour tout $a > 0$ et que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Que vaut $\Gamma(n)$?

(b) Soit X, Y deux v.a. indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$. On admettra la relation suivante vérifiée pour $a > 0$ et $b > 0$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Donner l'espérance et la variance de X.
Montrer que $X + Y$ suit une loi $\Gamma(a+b, \lambda)$.

(c) Soit X une v.a. réelle de loi Gaussienne centrée réduite définie en (1). Montrer que X^2 suit une loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (appelée aussi loi du χ^2 à un degré de liberté). En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

(d) Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes Gaussiennes centrées réduites. Donner la loi de $Z = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ (loi du χ^2 à n degrés de liberté), ainsi que l'espérance et la variance de Z.

(3) Soit $X = (X_1, X_2)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi $\mathcal{N}_2(0, I_2)$, c'est à dire de densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{||x||^2}{2}}$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$Y = \begin{cases} \frac{X_1}{X_2} & \text{si} \quad X_2 \neq 0. \\ 0 & \text{si} \quad X_2 = 0. \end{cases}$$

Quelle est la loi de Y?

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

$$\int_0^1 |f(x)|dx < \infty.$$

Soit $U_1, U_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$. Si

$$I_n := \frac{1}{n}\left(f(U_1) + \ldots + f(U_n)\right),$$

montrer que I_n converge en probabilité vers une constante I et préciser la valeur de I.