Master Recherche 2 ième année
Année 2009-2010

- **A - Processus Gaussiens**

Exercice 1 Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus Gaussien réel, centré, de covariance c. Montrer que le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ construit à partir de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus Gaussien dont on déterminera la covariance dans les cas suivants :
1- $Y_t = X_{at+b}, t \in \mathbb{R}$, où a, b sont deux réels fixés ;
2- $Y_t = aX_t + b, t \in \mathbb{R}$, où a, b sont deux réels fixés ;
3- $Y_t = X_{t^2}, t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 On considère l'application c définie par $c(s,t) = \mathbf{1}_{\{s=t\}}, s,t \in \mathbb{R}$.
1- Montrer que c est semi-définie positive.
2- On considère $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus Gaussien centré de covariance c. Montrer que si $s \neq t$, X_t et X_s sont indépendantes.

Exercice 3 1- Soit $c(s,t) = \cos(t-s), s,t \in \mathbb{R}$. Montrer que c est une application semi-définie positive.
2- On considère Z une v.a. réelle et ϕ sa fonction caractéristique. Montrer l'équivalence :
(i) Z est à loi symétrique.
(ii) ϕ est une fonction réelle paire.
3- On suppose Z de loi symétrique. Montrer que la fonction $\Gamma(s,t) = \phi(t-s), s,t \in \mathbb{R}$, est symétrique et semi-définie positive.
4- Dans cette question, Z suit une loi de Cauchy de paramètre β. Expliciter Γ. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus Gaussien centré de covariance Γ. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus stationnaire et que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $s,t \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{E}[(X_t - X_s)^2] \leq 2\beta|t-s|.$$

- **B - Mouvement Brownien**

Exercice 4 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel.
1- Expliciter la loi de la variable aléatoire B_t, pour tout $t \geq 0$.
2- On fixe $0 \leq s < t$. Expliciter la loi de la variable aléatoire $B_t - B_s$.
3- On fixe $0 \leq s < t$. Expliciter la loi du vecteur aléatoire (B_s, B_t).
4- On fixe $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$. On pose $X_1 = B_{t_1}$, $X_2 = B_{t_2} - B_{t_1}$, ..., $X_n = B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$. Montrer que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. Expliciter la loi du vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$.
5- On fixe $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$. Expliciter la loi du vecteur aléatoire $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$.

Exercice 5 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel. Montrer que les processus suivants sont aussi des mouvements Browniens réels :
1- $(B_{t_0+t} - B_{t_0})_{t\geq 0}$ où t_0 est un réel strictement positif ;
2- $(-B_t)_{t\geq 0}$;
3- $(c^{-1/2}B_{ct})_{t\geq 0}$ où c est une constante positive fixée ;
4- $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par : $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{1/t}, t > 0$.

Exercice 6 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel standard. Soit $\lambda > 0$. On pose, pour $t \geq 0$,

$$U_t = e^{-\lambda t}\, B_{e^{2\lambda t}}.$$

1- Montrer que $(U_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien réel centré.
2- Déterminer sa covariance c.
3- Déduire de la forme de c que $(U_t)_{t\geq 0}$ est *stationnaire au sens strict* c'est à dire que : $\forall n \geq 1$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$, $\forall s > 0$, avec $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, les v.a. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$ ont la même loi.

Exercice 7 Soit d un entier plus grand ou égal à 2. $< .,. >$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ et $||.||$ la norme euclidienne associée. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, on considère d mouvements Browniens réels indépendants $(B_t^1)_{t\geq 0}, (B_t^2)_{t\geq 0}, \ldots, (B_t^d)_{t\geq 0}$ et on pose pour $t \in \mathbb{R}^+$, $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$. ($(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien réel d-dimensionnel).
1- Montrer que $\forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $||x|| = 1$, le processus stochastique réel $(< B_t, x >)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien réel.
2- On prend $d = 2$ et on pose $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ avec

$$X_t^1 = B^1_{\frac{2t}{3}} - B^2_{\frac{t}{3}} \quad \text{et } X_t^2 = B^2_{\frac{2t}{3}} + B^1_{\frac{t}{3}}$$

Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est de norme 1, que peut-on dire du processus $(< X_t, x >)_{t\in\geq 0}$? Les processus stochastiques $(X_t^1)_{t\geq 0}$ et $(X_t^2)_{t\geq 0}$ sont-ils indépendants ? Sont-ils des mouvements Browniens réels ?
3- Si $(X_t)_{t\geq 0} = (X_t^1, \ldots, X_t^d)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique $d-$dimensionnel tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ de norme 1, $(< X_t, x >)_{t\geq 0}$ soit un mouvement Brownien réel, $(X_t^1)_{t\geq 0}, \ldots, (X_t^d)_{t\geq 0}$ sont-ils des mouvements Browniens réels indépendants ?

– C - Processus de Poisson

Exercice 8 On rappelle avec les notations du chapitre 2 du cours le résultat suivant :
Théorème :
Si les v.a.r. Z_k sont indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ, alors on a :
a) Pour tout $t > 0$, la v.a.r. N_t a la loi de Poisson de paramètre λt.
b) $(N_t)_{t\geq 0}$ est un P.A.I.S.
Le but de cet exercice est de montrer que a) implique b).
1- Montrer que pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{P}((S_1, ...S_n) \in A | N_t = n) = \frac{n!}{t^n} \int_A \mathbf{1}_{0<s_1<\ldots<s_n\leq t} ds_1 ... ds_n$$

2- En déduire que $\mathrm{P}(N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, ..., N_t - N_{t_k} = n_{k+1} | N_t = n)$ est égal à :

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_{k+1}!} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{n_1} \left(\frac{t_2 - t_1}{t}\right)^{n_2} \ldots \left(\frac{t - t_k}{t}\right)^{n_{k+1}}$$

avec $n = n_1 + \ldots + n_{k+1}$.
3- En déduire que pour tout $(n_1, \ldots, n_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$, $\mathrm{P}(N_{t_1} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, ..., N_t - N_{t_k} = n_{k+1})$ est égal à

$$\frac{(\lambda t_1)^{n_1} e^{-\lambda t_1}}{n_1!} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{n_2} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}}{n_2!} \ldots \frac{(\lambda(t - t_k))^{n_{k+1}} e^{-\lambda(t - t_k)}}{n_{k+1}!}$$

– **D - Martingales – Théorème d'arrêt de J.L. Doob**

Exercice 9 1- Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel standard.
a)- Montrer que $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une martingale P-p.s. continue relativement à la filtration naturelle complétée $(\bar{\mathcal{F}}_t^o)_{t\geq 0}$ de $(B_t)_{t\geq 0}$.
b)- Soit $\alpha > 0$. Montrer que $(\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t))_{t\geq 0}$ est une martingale P-p.s. continue relativement à la filtration naturelle complétée $(\bar{\mathcal{F}}_t^o)_{t\geq 0}$ de $(B_t)_{t\geq 0}$.

2- Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard de paramètre $\lambda > 0$.
a)- Montrer que $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue à droite relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^o)_{t\geq 0}$ de $(N_t)_{t\geq 0}$.
b)- Soit $\alpha > 0$. Montrer que $(\exp(\alpha N_t - (e^\alpha - 1)\lambda t))_{t\geq 0}$ est une martingale continue à droite relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^o)_{t\geq 0}$ de $(N_t)_{t\geq 0}$.
3- Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$S_t = \sup_{s\in[0,t]} N_s.$$

Montrer que pour tout $a > 1$, pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{P}(S_t \geq a\lambda t) \leq \exp(-\lambda t(1 - a + a\ln\ a)).$$

Exercice 10 [Mesures Gaussiennes et mouvement Brownien réel]
Un espace Gaussien réel est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ formé de (classes d'équivalence de) v.a.r. Gaussiennes centrées.
Une mesure Gaussienne m sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ d'intensité la mesure de Lebesgue l sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ est une application linéaire isométrique de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ sur un sous-espace Gaussien G d'un espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. On a donc en particulier :

$$< m(f), m(g) >_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})} = < f, g >_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Propriété : Toute (classe déquivalence de) v.a.r. X sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ limite dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$d'une suite de (classes d'équivalence de) v.a.r. Gaussiennes centrées est elle-même gaussienne, centrée.
1- Montrer que si m est une mesure Gaussienne (sur $L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$) d'intensité l et si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, B_t désigne un représentant de la classe d'équivalence $m(\mathbf{1}_{[0,t]})$, le processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien réel.
2- Soit m une mesure Gaussienne d'intensité l et le mouvement Brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ qui lui a été associé en 1).
On note $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ boréliennes et telles que pour tout $t > 0$, on ait : $f.\mathbf{1}_{[0,t]} \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$. Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ fixée. On lui associe un processus stochastique réel $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t soit un représentant de la classe d'équivalence $m(f.\mathbf{1}_{[0,t]})$.
a) Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien centré. Montrer que c'est un P.A.I..
b) Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration naturelle complétée $(\bar{\mathcal{F}}_t^o)_{t\geq 0}$ de $(B_t)_{t\geq 0}$.
3- Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel, basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Montrer qu'il existe une mesure Gaussienne m unique sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ d'intensité l telle que l'on ait :

$$m(f) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}), \forall f \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

et telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, B_t soit un représentant de la classe d'équivalence $m(\mathbf{1}_{[0,t]})$.
4- Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel dont toutes les trajectoires sont continues. Soit m la mesure Gaussienne associée (cf 3)). Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ fixée.
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique réel tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t soit un représentant de la classe d'équivalence $m(f.\mathbf{1}_{[0,t]})$. D'après 2-, $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $(\bar{\mathcal{F}}^o_t)_{t\geq 0}$-martingale.
Montrer qu'il existe une modification $(Y_t)_{t\geq 0}$ de $(X_t)_{t\geq 0}$ dont toutes les trajectoires sont continues.
Définition : Une telle modification continue $(Y_t)_{t\geq 0}$ de $(X_t)_{t\geq 0}$ est notée $\int_0^t f(s)\, dB_s$ *l'intégrale stochastique de Wiener* de la fonction déterministe $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ par rapport au mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 11 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel standard. Soient a et b deux réels strictement positifs. Notons T le temps de sortie de l'intervalle $]-a, b[$ de $(B_t)_{t\geq 0}$. Montrer les égalités suivantes :

$$P(B_T = b) = \frac{a}{a+b}$$

et

$$P(B_T = -a) = \frac{b}{a+b}.$$

Exercice 12 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel standard. Soit $a > 0$. Notons $\widetilde{T}_a$ le temps d'atteinte de $\{-a, a\}$. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer l'égalité :

$$E(\exp(-\lambda \widetilde{T}_a)) = \Big(\cosh(a\sqrt{2\lambda})\Big)^{-1}.$$

Indication : Montrer que le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$M_t = \cosh(sB_t)\exp(-s^2 t/2)$$

est une martingale où s est un réel positif arbitraire.

Exercice 13 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien réel standard. Soient a et b deux réels tels que l'on ait $a < 0 < b$. Notons T le temps d'atteinte de $\{a, b\}$. Soit $s \geq 0$. Montrer l'égalité :

$$E(\exp(-s^2 T/2)) = \frac{\cosh(s(a+b)/2)}{\cosh(s(a-b)/2)}.$$

Indication : On pourra remarquer que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$N_t = \exp(s(B_t - (a+b)/2) - s^2 t/2)$$

est une martingale.