
Examen du 7 janvier 2019 - Durée : 1 h 30 mn
Les documents et les calculatrices sont interdits.

Questions de cours. *On attend une rédaction parfaite, tout oubli sera sanctionné.*
1 - Enoncer la loi forte des grands nombres.
2 - Enoncer le théorème central limite.

Exercice 1. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.

$$Y_n = \inf(X_1, \ldots, X_n).$$

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbf{P}(X_1 > t)$.

(2) En déduire $\mathbf{P}(Y_n > t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que les suites $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(nY_n)_{n\geq 1}$ convergent en loi, vers des limites qu'on précisera.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle la densité de la loi $\Gamma(n, \lambda)$:

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

ainsi que sa fonction caractéristique

$$\psi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n, t \in \mathbb{R}.$$

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Calculer la fonction caractéristique de la v.a. X_1.

(2) Déterminer la loi de $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(3) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} g\left(\frac{x}{n}\right) x^{n-1} e^{-\lambda x}\, \mathrm{dx}.$$

Exercice 3. On suppose qu'on dispose d'un algorithme fournissant des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendantes. Décrire une méthode permettant de simuler les variables aléatoires ayant les densités suivantes :

(1) $f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-x/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) + \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8}$.

(2) $f_2(x) = a x^{a-1} e^{-x^a} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ avec $a > 0$ (loi de Weibull).

(3) $f_3(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ avec $a \in]0,1[$ (loi Gamma).
(*Indication : Comparer f_3 à la fonction f_2*).

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On suppose qu'elle satisfait aux trois hypothèses suivantes :
(H_1) $\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq X_3(\omega) \leq \dots,$
(H_2) il existe des constantes $a > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{E}[X_n] = an^\alpha$,
(H_3) il existe des constantes $M > 0$ et $\beta \in]0, 2\alpha[$ telles que

$$\mathrm{Var}(X_n) \leq Mn^\beta, \quad \forall n \geq 1.$$

Le but de cet exercice est de montrer que sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), la suite $(\frac{X_n}{n^\alpha})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers a.

(1) Montrer que pour tout $\delta > 0$, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbf{P}\Big(|X_n - an^\alpha| \geq \delta n^\alpha\Big) \leq \frac{M}{\delta^2} n^{\beta - 2\alpha}.$$

(2) On considère la sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ où $n_k = \lfloor k^{\frac{2}{2\alpha-\beta}} \rfloor$. Montrer que

$$\sum_{k\geq 1} \mathbf{P}\Big(|X_{n_k} - an_k^\alpha| \geq \delta n_k^\alpha\Big) < \infty.$$

En déduire que $\mathbf{P}$-p.s.,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{X_{n_k}}{n_k^\alpha} = a.$$

(3) Conclure à l'aide de la monotonie de X_n.