## Corrigé de l'examen du 5 janvier 2021

**Question de cours :** (3 pts) Voir le cours.

**Exercice 1.** (6pts)

(1) (1pt) Comme $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la v.a. $Y = \exp(X)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$ donc $F_Y(t)$ est nulle si $t < 1$. Calculons $F_Y(t)$ pour $t \geq 1$ :

$$\begin{aligned}
F_Y(t) &= \mathbf{P}(Y \leq t)\\
&= \mathbf{P}(\exp(X) \leq t)\\
&= \mathbf{P}(X \leq \ln(t))\\
&= \int_0^{\ln(t)} e^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \big[-e^{-x}\big]_0^{\ln(t)}\\
&= 1 - \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

En résumé,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1. \\ 1 - \frac{1}{t} & \text{si} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

(2) (1pt) $F_Y$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf au point 1, donc

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{y^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(y).$$

(3) (2pts) La v.a. $W$ est le minimum de deux v.a., on va donc, pour déterminer sa loi, calculer sa fonction de répartition. Les v.a. $Z_1$ et $Z_2$ prenant leurs valeurs dans $[1, +\infty[$, le minimum $W$ prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$. La fonction de répartition de $W$ est donc nulle si $t < 1$. Soit $t \geq 1$.

$$\begin{aligned}
F_W(t) &= \mathbf{P}(\min(Z_1, Z_2) \leq t)\\
&= 1 - \mathbf{P}(\min(Z_1, Z_2) > t)\\
&= 1 - \mathbf{P}(Z_1 > t; Z_2 > t)\\
&= 1 - \mathbf{P}(Z_1 > t)\mathbf{P}(Z_2 > t) \quad \text{(par indépendance)}\\
&= 1 - (1 - F_Y(t))^2 \quad \text{(car } Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ ont même loi que } Y\text{, cf 2.)}\\
&= 1 - \frac{1}{t^2} \quad \text{(en utilisant 1.)}
\end{aligned}$$

En résumé,

$$F_W(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1. \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

$F_W$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf au point 1, donc

$$f_W(w) = F_W'(w) = \frac{2}{w^3}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(w).$$

(4) (2pts) On va utiliser la méthode de la fonction muette pour déterminer la loi de $V$. Soit $\psi$ une fonction mesurable positive.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\psi(V)] &= \mathbf{E}[\psi(Z_1Z_2)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(xy)\, \mathrm{d}\mathbf{P}_{(Z_1,Z_2)}(x,y) \quad \text{(par la FDT)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(xy)\, \mathrm{d}\mathbf{P}_{Z_1}(x)\, \mathrm{d}\mathbf{P}_{Z_2}(y) \ \text{(par indépendance)} \\
&= \int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} \psi(xy)\, \frac{1}{x^2}\frac{1}{y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_1^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty} \psi(xy)\, \frac{1}{y^2}\, \mathrm{d}y\right)\frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x \ \text{(par Fubini-Tonelli)}
\end{aligned}$$

Pour $x$ fixé dans $[1,+\infty[$, on effectue le changement de variables $v = xy$ soit $y = \frac{v}{x}$ et $dy = \frac{1}{x}dv$. La nouvelle variable $v$ va varier de $x$ à $+\infty$. D'où,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\psi(V)] &= \int_1^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \psi(v)\, \frac{x^2}{v^2}\frac{1}{x}\, \mathrm{d}v\right)\frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \psi(v)\left(\int_1^{v} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x\right)\frac{1}{v^2}\, \mathrm{d}v \ \text{(par Fubini-Tonelli)} \\
&= \int_1^{+\infty} \psi(v)\frac{\ln(v)}{v^2}\, \mathrm{d}v \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(v)\left(\frac{\ln(v)}{v^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(v)\right)\, \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$f_V(v) = \frac{\ln(v)}{v^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(v).$$

**Exercice 2.** (5pts)

(1) (2pts) En utilisant la définition de la fonction caractéristique puis la FDT, on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-|x|}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{itx}e^{-x}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{itx}e^{x}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(it-1)x}}{it-1}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(it+1)x}}{it+1}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-it} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+it} \\
&= \frac{1}{(1+it)(1-it)} = \frac{1}{1-(it)^2} = \frac{1}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

(2) (a) (1pt) D'après le cours, $\phi_{X_1}(t) = e^{-t^2/2}$.

(b) (1pt) En utilisant la définition de la fonction caractéristique puis la FDT, on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi_{X_1X_2}(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{itxy}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_{(X_1,X_2)}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{itxy}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_{X_1}(x)\,\mathrm{d}\mathbf{P}_{X_2}(y) \text{ (par indépendance)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{itxy}e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(ty)x}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \text{ (par Fubini)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\phi_{X_1}(ty)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}e^{-t^2y^2/2}\,\mathrm{d}y \text{ (en utilisant 2.(a))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(1+t^2)}{2}y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ (en utilisant l'indication avec } a = \tfrac{1}{1+t^2}).
\end{aligned}$$

(c) (1pt) Les v.a. $X_1X_2$ et $X_3X_4$ étant indépendantes, la fonction caractéristique de $X_1X_2 + X_3X_4$ est égal au produit des fonctions caractéristiques de $X_1X_2$ et $X_3X_4$, chacune d'entre elles étant égale à $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ d'après la question 2.(b). Donc, $X_1X_2 + X_3X_4$ a pour fonction caractéristique $\frac{1}{1+t^2}$, soit la même fonction caractéristique que $X$ (cf question 1.). La fonction caractéristique caractérisant la loi, on en déduit que $X_1X_2 + X_3X_4$ suit une loi de Laplace.

**Exercice 3.** (5pts)

(1) (2pts) Par linéarité et du fait que $X$ et $Y$ ont même loi (donc même espérance)

$$\mathbf{E}\left[\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{E}[X] = \sqrt{2}\mathbf{E}[X].$$

Comme $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $X$ ont même loi donc même espérance, on en déduit que $\sqrt{2}\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X]$ soit $\mathbf{E}[X] = 0$.

(2) (2pts) On fait l'hypothèse de récurrence suivante $(H_n)$ pour $n \geq 1$ : la somme de $2^n$ v.a.i.i.d. de même loi que $X$ divisée par $\sqrt{2^n}$ a même loi que $X$. L'hypothèse est clairement vérifiée pour $n = 1$. Supposons $(H_n)$ satisfaite. On peut réécrire

$$\begin{aligned}
Z_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}} X_i \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=1}^{2^n} X_i}_{A_n} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=1}^{2^n} X_{2^n+i}}_{B_n}\right\}
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les v.a. $A_n$ et $B_n$ ont même loi que $X$. De plus, elles sont indépendantes, donc d'après l'hypothèse de l'énoncé, $Z_{n+1}$ a même loi que $X$. Donc, pour tout $n \geq 1$, $Z_n$ a même loi que $X$.

(3) (1pt) Les v.a. $X_i$ étant i.i.d., centrées (d'après la question 1.), de variance finie $\sigma^2$, on en déduit d'après le T.C.L. que $Z_n$ converge en loi vers la loi Normale centrée, de variance $\sigma^2$. D'après la question 2., la suite $Z_n$ est constante en loi et a même loi que $X$ donc $X$ a pour loi la loi Normale centrée, de variance $\sigma^2$.

**Exercice 4.** (4pts)

(1) (2pts) La densité $f_1$ est à support borné et a un maximum égal à $8/9$ (Petite étude de variations !). On va utiliser la méthode du rejet sur le pavé

$$A = [0, 2] \times \left[0, \frac{8}{9}\right]$$

au borélien

$$B = \{(x, y) \in A | 0 < y < f_1(x)\}.$$

Soit $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites indépendantes de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Les vecteurs aléatoires $(2U_n, \frac{8}{9}V_n)$ sont de loi uniforme sur $A$. On définit

$$\begin{aligned} T &= \inf\{n \geq 1; (2U_n, \frac{8}{9}V_n) \in B\} \\ &= \inf\{n \geq 1; \frac{8}{9}V_n < f_1(2U_n)\} \\ &= \inf\{n \geq 1; \frac{8}{9}V_n < 6U_n^2(1 - U_n)\} \end{aligned}$$

Alors, d'après les théorèmes du cours, $(2U_T, \frac{8}{9}V_T)$ est de loi uniforme sur $B$ et $2U_T$ a pour densité $f_1$.

(2) (2pts) Par un simple calcul, la fonction de répartition de la loi de densité $f_2$ est donnée par

$$F_2(t) = (1 - e^{-t^2})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

L'inverse de $F_2$ est donnée par

$$u \to \ln\left(\frac{1}{1-u}\right)^{1/2}.$$

On utilise la méthode de la fonction inverse. Soit $U$ de loi uniforme sur $[0, 1]$, la v.a.

$$\ln\left(\frac{1}{1-U}\right)^{1/2} \quad (\text{ou} \quad (-\ln U)^{1/2})$$

a pour densité $f_2$.