## Corrigé de l'examen du 4 janvier 2022

**Exercice 1.** (8pts)

(1) La v.a. $Z = \exp(Y)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $]0, +\infty[$ donc $F_Z(t)$ est nulle si $t \leq 0$. Calculons $F_Y(t)$ pour $t > 0$ :

$$\begin{array}{rcl} F_Z(t) & = & \mathbf{P}(Z \leq t) \\ & = & \mathbf{P}(\exp(Y) \leq t) \\ & = & \mathbf{P}(Y \leq \ln(t)) \\ & = & F_Y(\ln(t)) \end{array}$$

En résumé,

$$F_Z(t) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si} \quad t \leq 0. \\ F_Y(\ln(t)) & \text{si} \quad t > 0. \end{array} \right.$$

(2) (a) La fonction de répartition de $X$ est nulle si $t \leq 1$. Soit $t > 1$.

$$\begin{array}{rcl} F_X(t) & = & \mathbf{P}(X \leq t) \\ & = & \displaystyle\int_1^t \frac{a}{x^{a+1}} \,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\left[ -\frac{1}{x^a} \right]_1^t \\ & = & \displaystyle 1 - \frac{1}{t^a} \end{array}$$

En résumé,

$$F_X(t) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si} \quad t \leq 1. \\ 1 - \frac{1}{t^a} & \text{si} \quad t > 1. \end{array} \right.$$

(b) La v.a. $X$ est intégrable ssi $\mathbf{E}[|X|] < +\infty$. Or

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}[|X|] & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) \,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle a \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \,\mathrm{d}x < +\infty \text{ ssi } \; a > 1. \end{array}$$

Soit $a > 1$. En utilisant le fait que $X$ est positive et le calcul ci-dessus, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}[X] & = & \mathbf{E}[|X|] \\ & = & \displaystyle a \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle a \left[ -\frac{1}{(a-1)x^{a-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{a}{a-1}. \end{array}$$

(c) On peut essayer la méthode de la fonction inverse. Cherchons l'inverse de la fonction de répartition de $X$ sur $[1, +\infty[$. Soit $x \geq 1$. On résout

$$1 - \frac{1}{x^a} = y$$

soit

$$x = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{1/a} =: F_X^{-1}(y).$$

D'après le cours, si $U$ est une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$ alors

$$F_X^{-1}(U) = \left(\frac{1}{1-U}\right)^{1/a}$$

a même loi que $X$.

(3) D'après la question 1), on sait que $F_Z(t) = F_Y(\ln(t))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$. On a déjà vu que si $Y \sim \mathcal{E}(a)$, alors $F_Y(t) = (1-e^{-at})\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$. On en déduit que

$$F_Z(t) = \left(1 - \frac{1}{t^a}\right)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi de Pareto calculée en (2)(a). Donc, $Z$ suit une loi de Pareto de paramètre $a$.

**Exercice 2.** (5pts)

(1) En utilisant la FDT dans $\mathbb{R}^2$ (en voyant $g(y) = g \circ \pi_2(x,y)$ comme une fonction du couple $(x,y)$), on obtient que

$$\mathbf{E}[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(y) f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\mathbf{E}[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

On en déduit que la loi de $Y$ (appelée marginale !) est à densité donnée par

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} x e^{-x(y+1)}\,\mathrm{d}x \quad (\text{si} \quad y > 0) \\
&= \frac{1}{y+1}\int_{\mathbb{R}_+} x\left((y+1)e^{-(y+1)x}\right)\,\mathrm{d}x \quad (\text{si} \quad y > 0) \\
&= \frac{1}{y+1}\mathbf{E}(Z) \text{ où } \ Z \sim \mathcal{E}(y+1) \quad (\text{si} \quad y > 0) \\
&= \frac{1}{(y+1)^2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y).
\end{aligned}$$

**Remarque :** On peut aussi faire une IPP.

(2) (a) On utilise la FDT dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[g(U,V)] &= \mathbf{E}[g(X,XY)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g(x,xy) f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(x,xy)xe^{-x(y+1)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\left(\int_0^{+\infty} g(x,xy)e^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \text{(par Fubini)} \\
&= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\left(\int_0^{+\infty} g(x,v)e^{-v}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}x \quad \text{en posant } v = xy \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(u,v)e^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Donc, $f_{(U,V)}(u,v) = e^{-(u+v)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+(u)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$.

**Remarque :** On peut aussi faire un changement de variables dans l'intégrale double. Dans ce cas, il faut calculer son Jacobien proprement.

(b) D'après la question (2)(a), la densité du vecteur $(U,V)$ s'écrit comme le produit des deux densités : $f_U(u) = e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$ et $f_V(v) = e^{-v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$. On en déduit que $U$ et $V$ sont indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1.

**Exercice 3.** (3pts)

La loi Normale centrée, réduite a pour fonction caractéristique

$$\phi_{X_1}(t) = e^{-t^2/2}.$$

Calculons la fonction caractéristique de $Y_n$ :

$$\begin{aligned}
\phi_{Y_n}(t) &= \mathbf{E}[e^{itY_n}] \\
&= \mathbf{E}[e^{it\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{3^k}}] \\
&= \mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{i\left(\frac{t}{3^k}\right)X_k}\right] \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbf{E}\left[e^{i\left(\frac{t}{3^k}\right)X_k}\right] \quad \text{car les v.a. } X_k \text{ sont indépendantes} \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbf{E}[e^{i\left(\frac{t}{3^k}\right)X_1}] \quad \text{car} \quad X_k \sim X_1 \\
&= \prod_{k=1}^n \phi_{X_1}\left(\frac{t}{3^k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^n e^{-\frac{t^2}{2.3^{2k}}} \\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{9^k}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\frac{1}{9}\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\right) \to e^{-t^2/(2.8)}
\end{aligned}$$

On reconnait la fonction caractéristique de la loi Normale centrée, de variance 1/8. D'après le théorème de Paul Lévy, la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{8})$.

**Exercice 4.** (4pts)

(1) La densité $f_1$ est à support borné et a un maximum égal à 3/2 (Petite étude de variations !). On va utiliser la méthode du rejet sur le pavé

$$A = [0,1] \times \left[0, \frac{3}{2}\right]$$

au borélien

$$B = \{(x,y) \in A | 0 < y < f_1(x)\}.$$

Soit $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites indépendantes de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Les vecteurs aléatoires $(U_n, \frac{3}{2}V_n)$ sont de loi uniforme sur $A$. On définit

$$\begin{aligned} T &= \inf\{n \geq 1; (U_n, \frac{3}{2}V_n) \in B\} \\ &= \inf\{n \geq 1; \frac{3}{2}V_n < f_1(U_n)\} \\ &= \inf\{n \geq 1; \frac{3}{2}V_n < 6U_n(1-U_n)\} \end{aligned}$$

Alors, d'après les théorèmes du cours, $(U_T, \frac{3}{2}V_T)$ est de loi uniforme sur $B$ et $U_T$ a pour densité $f_1$.

(2) La fonction $f$ est continue sur $[0,1]$ donc bornée.
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de densité $6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. En utilisant la F.D.T., on a

$$\begin{aligned} & 6^n \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) x_1 \ldots x_n (1-x_1) \ldots (1-x_n) \, dx_1 \ldots x_n \\ = & \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \left(6x_1(1-x_1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x_1)\right) \ldots \left(6x_n(1-x_n)\mathbf{1}_{[0,1]}(x_n)\right) \, dx_1 \ldots x_n \\ = & \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) d\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) \\ = & \mathbf{E}\left[f\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

On applique la LFGN. Pour cela, il faut calculer l'espérance de $X_1$ :

$$\mathbf{E}[X_1] = 6\int_0^1 x^2(1-x) \, dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

La moyenne des v.a. $X_1, \ldots, X_n$ converge p.s., donc en loi, vers $\frac{1}{2}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Par définition de la convergence en loi, on en déduit que

$$\mathbf{E}\left[f\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)\right]$$

converge vers $\mathbf{E}[f(\frac{1}{2})] = f(\frac{1}{2})$.
**Remarque :** On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée.