Corrigé du partiel du 13 novembre 2018

Questions de cours : (6pts)

Exercice 1. (11pts)

(1) (a) On cherche à expliciter la fonction

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbf{P}(X \leq t) \\ &= \mathbf{P}(e^Z \leq t) \end{aligned}$$

La variable aléatoire Z étant (presque sûrement) positive, F_X est nulle si $t \leq 1$. La fonction $\ln : x \to \ln(x)$ étant bijective, strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que si $t > 1$,

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbf{P}(Z \leq \ln(t)) \\ &= a \int_0^{\ln(t)} e^{-ax}\, dx \\ &= 1 - \frac{1}{t^a}. \end{aligned}$$

(b) La fonction F_X étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 1, la loi de X admet une densité donnée par :

$$f_X(t) = \frac{a}{t^{a+1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

(2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

(a) La variable aléatoire X admet un moment d'ordre k si $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$. Par la formule du transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X|^k] &= \mathbb{E}[X^k] \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x) dx \\ &= a \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a-k+1}}\, dx < +\infty \end{aligned}$$

si et seulement si $a > k$.

(b) Supposons que $a > k$. Son moment d'ordre k vaut alors $a/(a-k)$.

(3) Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X et qui suit aussi la loi de Paréto de paramètre a. On cherche à déterminer la loi de $W = \min(X, Y)$.

Notons F_W la fonction de répartition de W. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} F_W(t) & = & \mathbf{P}(W \leq t) \\ & = & \mathbf{P}(\min(X,Y) \leq t) \\ & = & 1 - \mathbf{P}(\min(X,Y) > t) \\ & = & 1 - \mathbf{P}(X > t)\mathbf{P}(Y > t) \text{ car } X \perp Y \\ & = & 1 - (1 - F_X(t))^2 \text{ car } X \sim Y \\ & = & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t^{2a}} & \text{si } t > 1. \end{array} \right. \end{array}$$

La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit que la loi de W est la loi de Paréto de paramètre $2a$.

(4) Loi de $V = XY$. Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}[\psi(V)] & = & \mathbf{E}[\psi(XY)] \\ & = & \displaystyle\int_\Omega \psi(XY)\, d\mathbf{P} \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \psi(xy)\, d\mathbf{P}_{(X,Y)}(x,y) \quad \text{par la FDT} \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \psi(xy)\, d\mathbf{P}_X(x) d\mathbf{P}_Y(y) \quad \text{car } X \perp Y \\ & = & \displaystyle a^2 \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \psi(xy) \frac{dxdy}{x^{a+1}y^{a+1}} \quad \text{car } X, Y \sim Pareto(a) \\ & = & \displaystyle a^2 \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \psi(xy) \frac{dx}{x^{a+1}} \right) \frac{dy}{y^{a+1}} \quad \text{par Fubini-Tonelli} \\ & = & \displaystyle a^2 \int_1^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \psi(u) \frac{du}{u^{a+1}} \right) \frac{dy}{y} \text{ par le changement de variables } u = xy \\ & = & \displaystyle a^2 \int_1^{+\infty} \psi(u) \left(\int_1^u \frac{dy}{y} \right) \frac{du}{u^{a+1}} \quad \text{par Fubini-Tonelli} \\ & = & \displaystyle a^2 \int_{\mathbb{R}} \psi(u) \frac{\ln(u)}{u^{a+1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(u)\, du \end{array}$$

On en déduit que la loi de V a pour densité la fonction

$$f_V(v) = a^2 \frac{\ln(v)}{v^{a+1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(v).$$

Exercice 2. (3pts) Soit X une variable aléatoire de loi Normale centrée, réduite. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $x > 0$,

$$\mathbf{P}(|X| \geq x) \leq \frac{1}{x^2}. \tag{1}$$

Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}(|X| \geq x) & = & 1 - \mathbf{P}(|X| < x) \\ & = & 1 - 2\mathbf{P}(0 < X < x) \\ & = & \displaystyle 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \qquad (2) \end{array}$$

En combinant (1) et (2), on obtient l'inégalité demandée.