Université Claude Bernard Lyon 1
Année universitaire 2012-2013

Master M1 Equades - TD de Probabilités

1 Espérance conditionnelle

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.
Démontrer les propriétés suivantes :
1) $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \implies \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$
2) X $\mathcal{G}-$mesurable $\implies \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$
3) Soit $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}) = a_1\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + a_2\mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$
4) $X \geq 0 \implies \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On pose

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}].$$

Montrer que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]).$$

Exercice 3 Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1, λ_2.
1) Déterminer la loi de X_1 sachant l'événement $\{X_1 + X_2 = n\}$.
2) Déterminer $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$.

Exercice 4 Soit X et Y des v.a. dont la loi conjointe admet une densité qu'on note $f_{(X,Y)}$. On note f_X et f_Y les densités des lois marginales de X et Y. On définit

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{si } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit h une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(|h(X)|) < \infty$. Posons $g(y) = \int h(x) f_{X|Y}(x,y)dx$.
Montrer que $g(Y)$ est presque sûrement égale à $\mathbb{E}(h(X)|Y)$.

Exercice 5 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance définie positive

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho \\ \rho & \sigma'^2 \end{pmatrix}$$

avec $\sigma' \neq 0$.
Expliciter $\mathbb{E}(X|Y)$
Indication : Utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 12 (Urne de Polya) - Soit une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne de la manière suivante : à chaque tirage, on choisit au hasard une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne, ainsi qu'une autre boule de la même couleur.
On note S_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches dans l'urne après le n-ième tirage ($S_0 = 1$).
1) Déterminer la loi de S_{n+1} conditionnellement à $S_n = k$.
2) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(S_{n+1}|S_n)$, puis $\mathbb{E}(S_n)$.

2 Martingale à temps discret

Exercice 13 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. telle que $\mathbb{E}(X_1) = m$ et de carré intégrable. Pour tout $n \geq 1$, on définit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1) Sous quelle condition $(S_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$?
2) Montrer que si cette condition est vérifiée, $(S_n^2)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
3) Soit $p \geq 1$ tel que $\mathbb{E}(|X_1|^p) < \infty$. Montrer que $(|S_n|^p)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale.
4) Supposons que pour tout $t > 0$, la transformée de Laplace $\phi(t) = \mathbb{E}(\exp(-tX_1))$ est finie. Montrer que pour tout $t > 0$, $M_n = \exp(-tS_n)\phi(t)^{-n}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 14 Soient deux temps d'arrêt T_1 et T_2 définis sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, \mathbb{P})$. Montrer que les variables aléatoires

$$S_1 = \inf(T_1, T_2) \quad S_2 = \sup(T_1, T_2) \quad S_3 = T_1 + T_2$$

sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 15 Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ et soit T un temps d'arrêt pour cette filtration.
1) Montrer que $(M_{T\wedge n})_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la fitration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2) Calculer $\mathbb{E}(M_{T\wedge n})$.

Exercice 16 Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2.$$

On définit $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Soit $T_k = \inf\{n \geq 1 | S_n = k\}$ le temps d'atteinte du point k par la marche $(S_n)_n$.
1) Soit $\theta > 0$ et $M_n = \exp(\theta S_n)\cosh(\theta)^{-n}$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ et que T_k est un temps d'arrêt.
2) Calculer $\mathbb{E}(M_{T_k\wedge n})$.
3) On note $T = T_1$, et on définit

$$M_T = \sum_{i=1}^{\infty} M_i 1_{\{T=i\}}.$$

Université C. Bernard - Lyon 1
Année universitaire 2011-2012

Calcul Stochastique et Applications - Examen du mardi 19 juin

Question de cours:
Enoncer et démontrer le théorème d'arrêt de J.L. Doob.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$.
1- Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-martingale.
2- Calculer $\mathbf{E}(S_n^2)$ pour tout $n \geq 1$.
3- On définit pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $M_n = S_n^2 - n$. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-martingale.
4- Soit T le premier instant où la suite $(S_n)_n$ atteint l'ensemble $\{-2, 2\}$, c'est à dire

$$T = \inf\{n \geq 1; |S_n| = 2\}.$$

Montrer que T est un $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}-$temps d'arrêt.
5- *On admet que T est presque sûrement fini.* Appliquer le théorème d'arrêt de J.L. Doob et en déduire le temps moyen d'atteinte de l'ensemble $\{-2, 2\}$ par la suite $(S_n)_n$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi Normale centrée, réduite. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
On rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}(e^{uX_1}) = e^{u^2/2}.$$

1- Soit $Z_n^u = \exp(uS_n - nu^2/2)$. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-martingale.
2- Calculer $\mathbf{E}(Z_n^u)$.
3- Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z_∞^u finie. Calculer cette limite (on distinguera les cas $u = 0$ et $u \neq 0$).
4- Montrer que si $u \neq 0$, la martingale $(Z_n^u)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans L^1. Qu'en est-il dans le cas $u = 0$?