INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE

Nadine GUILLOTIN-PLANTARD

13 novembre 2009

Table des matières

Chapitre 1

Processus stochastiques

1.1 Processus stochastiques équivalents. Modification. Processus indistinguables.

L'objet de la théorie des processus stochastiques (ou aléatoires) est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, un ensemble $\mathbb{T}$ appelé *ensemble des temps* (exemples : $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ou $[0,t]$). Soit aussi $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable appelé *l'espace des états.*

Un processus stochastique à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de variables aléatoires (abréviation : v.a.) de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $(E, \mathcal{E})$.

A $\omega \in \Omega$, on associe l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \to & E \\ t & \mapsto & X_t(\omega) \end{array}$$

appelée *la trajectoire de* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *associée à* ω.
Prenons $E = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est $\mathbb{P}-$*p.s. continu à droite* (resp. : $\mathbb{P}-$p.s. continu à gauche, $\mathbb{P}-$p.s. continu) si pour $\mathbb{P}-$presque tout $\omega \in \Omega$, $t \to X_t(\omega)$ est continue à droite (resp. : continue à gauche, continue).

On dira que deux processus stochastiques décrivent le même phénomène aléatoire s'ils sont équivalents au sens suivant :

Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ deux processus stochastiques à valeurs dans le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$, avec $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ basé sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$.
On dit qu'ils sont *équivalents* si $\forall\ n \geq 1, \forall\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}, \forall\ B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}$, on a :

$$\mathbb{P}(\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\}) = \mathbb{P}'(\{X'_{t_1} \in B_1, \ldots, X'_{t_n} \in B_n\}).$$

On dira encore que chacun de ces processus est *une version de l'autre* ou encore que $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont *des versions du même processus.* (C'est

une relation d'équivalence !).
La famille des lois des v.a. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ lorsque $\{t_1, \ldots, t_n\}$ parcourt l'ensemble des parties finies non vides de $\mathbb{T}$ s'appelle *la famille des lois de dimension finie* ou *famille des répartitions finies de* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$.
Deux processus stochastiques sont équivalents si et seulement si ils ont les mêmes répartitions finies.

A partir de maintenant, $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ et $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est *un processus à accroissements indépendants* (abréviation : P.A.I.) si on a :
(i) $X_0 = 0$ $\mathbb{P}-$p.s.
et
(ii) $\forall\ n \geq 2, \forall\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, les v.a.

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.
Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est *un processus à accroissements indépendants stationnaires* (abréviation : P.A.I.S.) si c'est un P.A.I. et si
(iii) $\forall\ s, t \in \mathbb{R}^+$, tels que $0 \leq s < t$, la v.a. $X_t - X_s$ a la même loi que X_{t-s}.
Autrement dit, $\forall\ h \geq 0$,

$$X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{t-s},$$

$\forall\ s, t \in \mathbb{R}^+$, tels que $0 \leq s < t$. (Notation : $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ ssi X et Y ont même loi).

Lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, la notion correspondante à celle de P.A.I. (resp. : P.A.I.S.) est la suivante :
on se donne une suite $(Z_k)_{k\geq 1}$ de v.a. $d-$dimensionnelles indépendantes et on pose : $S_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s.
et pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = Z_1 + \ldots + Z_n.$$

$(S_n)_{n\geq 0}$ vérifie (i) et (ii) et si les v.a. $Z_k, k \geq 1$, ont même loi, $(S_n)_{n\geq 0}$ vérifie (iii) et s'appelle *une marche aléatoire.*

Une famille $(\mu_t)_{t\in\ ]0,+\infty[}$ de probabilités sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est *un semi-groupe de convolution* si on a : $\forall\ s \in\ ]0, +\infty[, \forall\ t \in\ ]0, +\infty[$,

$$\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t.$$

($\mu * \nu$ est la mesure image de $\mu \otimes \nu$ par l'application $(x, y) \to x + y$).

Proposition 1.1.1. *a). Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un P.A.I.S. (à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$) et si pour tout $t \in\ ]0, +\infty[$, μ_t désigne la loi de X_t, alors $(\mu_t)_{t\in\ ]0,+\infty[}$ est un semi-groupe de convolution. On l'appelle* le semi-groupe de convolution du P.A.I.S. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
b). Plus généralement, si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un P.A.I. et si pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t$, $\mu_{s,t}$ désigne la loi de $X_t - X_s$, alors on a : $\forall\ s, t, u \in \mathbb{R}^+$, tels que $s < t < u$, on a :

$$\mu_{s,u} = \mu_{s,t} * \mu_{t,u}.$$

Démonstration. a) On a :

$$X_{s+t} = X_s + (X_{s+t} - X_s).$$

Or, X_s et $X_{s+t} - X_s$ sont des v.a. indépendantes et $X_{s+t} - X_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_t$, donc

$$\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t.$$

b) On écrit :

$$X_u - X_s = (X_u - X_t) + (X_t - X_s).$$

$X_u - X_s$ a pour loi $\mu_{s,u}$; $(X_u - X_t)$ et $(X_t - X_s)$ sont des v.a. indépendantes de lois respectives $\mu_{t,u}$ et $\mu_{s,t}$, d'où l'égalité

$$\mu_{s,u} = \mu_{s,t} * \mu_{t,u}.$$

$\square$

Proposition 1.1.2. *a). Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont deux P.A.I.S. $d-$dimensionnels (basés sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$) qui ont même semi-groupe de convolution, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont équivalents.*
b). Plus généralement, si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont deux P.A.I. $d-$dimensionnels tels que pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$ avec $s < t$, on ait :

$$X_t - X_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} X'_t - X'_s,$$

alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont équivalents.

Remarque : Le a). peut se reformuler ainsi : deux P.A.I.S. qui ont les mêmes lois de dimension 1 ont les mêmes lois de dimension finie. Ce résultat n'est pas vrai pour des processus plus généraux.

Démonstration. b) : (Remarquons que $b). \Longrightarrow a).$).
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} X'_t$. De plus, pour tout $n \geq 2$, pour tout $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n}).$$

En effet, les v.a. $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ et $(X'_{t_1}, X'_{t_2} - X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n} - X'_{t_{n-1}})$ ont la loi $\mu_{0,t_1} \otimes \mu_{t_1,t_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{n-1},t_n}$. On en déduit en considérant l'application :

$$\phi : (u_1, \ldots, u_n) \to (u_1, u_1 + u_2, \ldots, u_1 + \ldots + u_n)$$

que $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = \phi(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ et $(X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n})$ ont la même loi, c'est à dire la mesure image par ϕ de $\mu_{0,t_1} \otimes \mu_{t_1,t_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{n-1},t_n}$.
$\square$

Exemples de semi-groupes de convolution sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *:*

1). Si $\mu_t = \delta_{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé, pour tout $t \in]0, +\infty[$, alors $(\mu_t)_{t\in]0,+\infty[}$ est un semi-groupe de convolution.

2). Si μ_t est la loi de Poisson de paramètre λt (avec $\lambda > 0$ fixé) pour tout $t \in]0, +\infty[$, alors $(\mu_t)_{t\in]0,+\infty[}$ est un semi-groupe de convolution (Il suffit de remarquer que la somme de deux v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres α et β suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$).

3). Si pour tout $t \in]0, +\infty[$, μ_t est la loi normale $\mathcal{N}(0, t)$, alors $(\mu_t)_{t\in]0,+\infty[}$ est un semi-groupe de convolution (la somme de deux v.a. indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma'^2)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2 + \sigma'^2)$).

On appelle *processus de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$ tout P.A.I.S. réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ qui a pour semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t\in]0,+\infty[}$ où μ_t est la loi de Poisson de paramètre λt pour tout $t \in]0, +\infty[$.
On appelle *mouvement Brownien* tout P.A.I.S. réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ qui a pour semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t\in]0,+\infty[}$ où μ_t est la loi normale $\mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

On verra par la suite qu'il existe effectivement des P.A.I.S. associés à ces semi-groupes de convolution.

Revenons au cas où $\mathbb{T}$ est un ensemble infini quelconque.

Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est *un processus gaussien réel* si :
i) il est à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
ii) $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, la v.a. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est gaussienne.

Rappels :
a). Une v.a.r. Y est dite gaussiennne s'il existe des réels a, b et une v.a.r. U de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ telles que $Y = aU + b$ $\mathbb{P}-$p.s. En particulier, toute v.a.r. $\mathbb{P}-$p.s. constante est gaussienne (cas $a = 0$). Si $a \neq 0$, Y a la loi normale $\mathcal{N}(b, a^2)$.
b). Une v.a. $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ est dite gaussienne si $\forall\ u \in \mathbb{R}^n$, $\langle\, u, Y\,\rangle = \sum_{k=1}^n u_k Y_k$ est une v.a.r. gaussienne.

La moyenne m d'un processus gaussien réel $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathbb{E}(X_t) = m(t) \end{array}$$

Lorsque $m(t) = 0, \forall\ t \in \mathbb{T}$, on dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est gaussien centré.
La covariance c d'un processus gaussien réel $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (s, t) & \mapsto & \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = c(s, t). \end{array}$$

Rappels :
Soit U, V deux v.a.r. de carré intégrables. Par définition,

$$\text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}[(U - \mathbb{E}(U))(V - \mathbb{E}(V))].$$

On a aussi

$$\text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V).$$

Proposition 1.1.3. *L'application c est symétrique et* semi-définie positive *(ou* de type positif*) c'est à dire :*
i) $c(s,t) = c(t,s), \forall s, t \in \mathbb{T}$.
ii) $\forall\ n \geq 1, \forall\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}, \forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} c(t_i, t_j)\lambda_i\lambda_j \geq 0.$$

La forme quadratique en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est de type positif ou encore la matrice $(c(t_i, t_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ est de type positif.

Démonstration. La matrice $(c(t_i, t_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ est la matrice de covariance de la v.a. de dimension n $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. C'est donc une matrice symétrique de type positif car

$$0 \leq \text{Var}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i}) = \sum_{i,j=1}^{n} c(t_i, t_j)\lambda_i\lambda_j.$$

□

Proposition 1.1.4. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont deux processus gaussiens réels qui ont même moyenne et même covariance, alors ils sont équivalents.*

Démonstration. Soit $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$. Les v.a. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et $(X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n})$ sont gaussiennes, de même espérance et même matrice de covariance. □

Théorème 1.1.1. *Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel si et seulement si c'est un processus gaussien réel centré, de covariance c définie par $c(s,t) = s \wedge t$.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel.
- $X_0 = 0$, $\mathbb{P}$-p.s..
- Pour tout $t > 0$, X_t suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t)$.
- Pour tout $n \geq 2$ et tout $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ tels que $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est gaussienne comme transformée linéaire de la v.a. gaussienne $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ (par l'application $\phi(x_1, \ldots, x_n) =$

$(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \ldots + x_n))$.
Donc, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus gaussien. Il est centré. Soit $s, t \in \mathbb{R}^+$,

$$c(s,t) = \mathbb{E}(X_s X_t).$$

Supposons que $s < t$, on a $X_t = X_t - X_s + X_s$, donc

$$c(s,t) = \mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)) + \mathbb{E}(X_s^2) = s$$

(car X_s et $X_t - X_s$ sont indépendantes et centrées).

$\Leftarrow$: Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus gaussien réel centré, de covariance c définie par $c(s,t) = s \wedge t$.
Soit $n \geq 2$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. La v.a. $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ est gaussienne comme transformée linéaire de la v.a. gaussienne $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ par l'application $\psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$.
Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i < j$. On a

$$\mathrm{Cov}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) = \mathbb{E}[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})] = 0.$$

Les composantes du vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont donc indépendantes. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est donc un P.A.I..
Soit $s < t$, $X_t - X_s = f(X_s, X_t)$ (avec $f(x,y) = y - x$) est gaussienne comme transformée linéaire de la v.a. gaussienne (X_s, X_t). De plus, $\mathbb{E}(X_t - X_s) = 0$ et

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = \mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - 2\mathbb{E}(X_s X_t) = t + s - 2s = t - s.$$

Donc, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un P.A.I.S. de semi-groupe de convolution $\mathcal{N}(0,t)$, c'est à dire un mouvement Brownien réel. $\square$

Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ deux processus stochastiques basés sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$.
On dit que $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est *une modification* de $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $X_t = X'_t$ $\mathbb{P}$-p.s. (L'ensemble négligeable peut dépendre de t).
Deux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont dits *indistinguables* si, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$X'_t(\omega) = X_t(\omega)$$

(c'est à dire qu'il existe un ensemble négligeable N tel que $\forall\ \omega \notin N$, on ait $X'_t(\omega) = X_t(\omega)$).

Remarques :
1) En temps discret, les notions de modifications et de processus indistinguables sont équivalentes.
2) Si $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une modification de $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont

équivalents.
3) a) Si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont indistinguables, alors chacun de ces processus est une modification de l'autre.
b) Prenons $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ et $E = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont $\mathbb{P}$-p.s. continus à droite et si $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une modification de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont indistinguables. (Exercice)

On appelle *mouvement Brownien réel standard* un mouvement Brownien réel dont les trajectoires sont $\mathbb{P}$-p.s. continues.

Théorème 1.1.2. *(admis pour le moment) Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, alors il existe une modification $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ qui est un mouvement Brownien réel standard.*

1.2 Loi d'un processus stochastique. Processus canonique.

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $\mathbb{T}$ un ensemble non vide. On note

$$E^{\mathbb{T}} = \{x = (x_t)_{t\in\mathbb{T}} : x_t \in E, \forall t \in \mathbb{T}\}.$$

On appelle *tribu produit* sur $E^{\mathbb{T}}$ (associée à la tribu $\mathcal{E}$ et à $\mathbb{T}$) la plus petite tribu sur $E^{\mathbb{T}}$ rendant mesurables les applications coordonnées :

$$\gamma_t : x = (x_s)_{s\in\mathbb{T}} \mapsto x_t$$

lorsque t parcourt $\mathbb{T}$. On la note $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}$. On appelle *espace mesurable produit* associé à $(E, \mathcal{E})$ et à $\mathbb{T}$ l'espace $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}) = (E, \mathcal{E})^{\mathbb{T}}$.

Proposition 1.2.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Soit U une application de Ω dans $E^{\mathbb{T}}$. Alors, U est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})^{\mathbb{T}}$si et seulement si $\forall\ t \in \mathbb{T}$, $\gamma_t \circ U$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Si U est mesurable, alors $\gamma_t \circ U$ est mesurable comme composée d'applications mesurables.
$\Leftarrow$: Réciproquement, si $\forall\ t \in \mathbb{T}$, $\gamma_t \circ U$ est mesurable, alors $(\gamma_t \circ U)^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall\ A \in \mathcal{E}$.
Or, $(\gamma_t \circ U)^{-1}(A) = U^{-1}((\gamma_t)^{-1}(A))$. Donc, $U^{-1}(B) \in\ \mathcal{F}$ pour tout

$$B \in \mathcal{D} := \{(\gamma_t)^{-1}(A) : t \in \mathbb{T}, A \in\ \mathcal{E}\}.$$

Or $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}} = \sigma(\mathcal{D})$, par le critère de mesurabilité classique, on a alors :

$$U^{-1}(B) \in\ \mathcal{F}$$

pour tout $B \in \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}$. □

Soit maintenant une famille $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ d'applications de Ω dans E.
On note X l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & E^{\mathbb{T}} \\ \omega & \longmapsto & (X_t(\omega))_{t\in\mathbb{T}}. \end{array}$$

On a alors le résultat suivant :

Corollaire 1.2.1. *$(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus stochastique à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ si et seulement si l'application X est mesurable de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(E,\mathcal{E})^{\mathbb{T}}$.*

Démonstration. Utiliser la proposition précédente. □

D'après le corollaire, on peut identifier un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et l'application mesurable X associée. On posera dans la suite $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

On appelle *loi, sur $(E,\mathcal{E})^{\mathbb{T}}$, de X* la probabilité image de $\mathbb{P}$ par l'application mesurable X. On la note $\mathbb{P}_X$.

Proposition 1.2.2. *Deux processus stochastiques $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (basés respectivement sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}')$) à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ sont équivalents si et seulement si ils ont la même loi sur $(E,\mathcal{E})^{\mathbb{T}}$.*

Démonstration. $\Leftarrow$: Si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}'_{X'}$, alors ils sont équivalents : soit $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{T}$, si $A = \prod_{t\in\mathbb{T}} A_t$ avec

$$A_t = \begin{cases} B_i \in \mathcal{E} \text{ si } t = t_i, 1 \le i \le n \\ E \text{ si } t \notin \{t_1,\dots,t_n\}, \end{cases}$$

on a :

$$X^{-1}(A) = \{X_{t_1} \in B_1,\dots,X_{t_n} \in B_n\}.$$
$$X'^{-1}(A) = \{X'_{t_1} \in B_1,\dots,X'_{t_n} \in B_n\}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}'(X'_{t_1} \in B_1,\dots,X'_{t_n} \in B_n) = \mathbb{P}'_{X'}(A) = \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1,\dots,X_{t_n} \in B_n).$$

$\Rightarrow$: Si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont équivalents, on a : $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}'_{X'}(A)$ pout tout cylindre A de $E^{\mathbb{T}}$. Or, $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}} = \sigma(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est la famille des cylindres (voir exercice 1.9). Or, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, donc d'après l'exercice 1.2 (Théorème des classes monotones), on en déduit que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}'_{X'}$. □

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique, basé sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$.

Le processus canonique $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$, sur $(E,\mathcal{E})^{\mathbb{T}}$, associé à $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est le processus stochastique basé sur $(E^{\mathbb{T}},\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}},\mathbb{P}_X)$ défini par :

$$Y_t(x) = \gamma_t(x) = x_t, \forall x = (x_s)_{s\in\mathbb{T}} \in E^{\mathbb{T}}.$$

Proposition 1.2.3. *$(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et son processus canonique $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont équivalents.*

Démonstration. Soient $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ et $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}$. Si $A = \prod_{t \in \mathbb{T}} A_t$ avec

$$A_t = \begin{cases} B_i \text{ si } t = t_i, 1 \leq i \leq n \\ E \text{ si } t \notin \{t_1, \ldots, t_n\}, \end{cases}$$

on a :

$$X^{-1}(A) = \{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\}.$$

On a aussi

$$A = \{x; Y_{t_1}(x) \in B_1, \ldots, Y_{t_n}(x) \in B_n\}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_X(Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n).$$

□

1.3 Processus canonique ayant des répartitions finies données

Soit $\mathbb{T}$ un ensemble infini. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties finies (non vides) de $\mathbb{T}$. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ une famille de probabilités indexée par $\mathcal{I}$, où pour tout $I \in \mathcal{I}$, $\mathbb{P}_I$ désigne une probabilité sur $(E, \mathcal{E})^{\text{card}(I)} = (E^{\text{card}(I)}, \mathcal{E}^{\text{card}(I)})$.

On dit que $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ est *un système compatible* (ou un *système projectif*) si : pour tout $I \in \mathcal{I}$, pour tout $J \in \mathcal{I}$ tel que $J \subset I$, $\mathbb{P}_J$ est la probabilité image de $\mathbb{P}_I$ par l'application

$$\Pi_{I,J} : (x_t)_{t \in I} \longrightarrow (x_s)_{s \in J}.$$

Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un processus stochastique, basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Si, pour $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{I}$, on note $\mathbb{P}_I$ la loi de la v.a. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, alors $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ est la famille des répartitions finies du processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$. De plus, on a :

Proposition 1.3.1. *Les répartitions finies de $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ forment un système compatible.*

Démonstration. Si $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \supset J = \{t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}\}$, avec $t_i \in \mathbb{T}, \forall i = 1, \ldots, n, n \geq 2$, $1 \leq k < n, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_J(B_1 \times \ldots \times B_k) &= \mathbb{P}(X_{t_{i_1}} \in B_1, \ldots, X_{t_{i_k}} \in B_k) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_j} \in E, \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}, X_{t_{i_1}} \in B_1, \ldots, X_{t_{i_k}} \in B_k) \\ &= \mathbb{P}_I(\Pi_{I,J}^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_k)) \end{aligned}$$

□

Inversement, partons d'une famille $(\mathbb{P}_I)_{I\in\mathcal{I}}$ compatible de probabilités (avec pour tout $I \in \mathcal{I}$, $\mathbb{P}_I$ probabilité sur $(E, \mathcal{E})^{\mathrm{card}(I)}$).
On pose :
$\Omega = E^{\mathbb{T}} = \{\omega = (\omega_t)_{t\in\mathbb{T}} : \omega_t \in E, \forall t \in \mathbb{T}\}$.
$\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}$.
$Y_t(\omega) = \omega_t$.
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ peut être considéré comme un processus stochastique basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On l'appelle *le processus canonique associé à* $\mathbb{P}$ *(sur* $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}, \mathbb{P})$*).*

Théorème 1.3.1. [Kolmogorov] *(admis) Si E est un espace polonais et si $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne de E, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}) := (E, \mathcal{E})^{\mathbb{T}}$ telle que le processus canonique $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admette $(P_I)_{I\in\mathcal{I}}$ comme famille de répartitions finies.*

Applications :

Corollaire 1.3.1. *a). A tout semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t\in]0,+\infty[}$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ correspond un P.A.I.S. $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, unique à une équivalence près, tel que pour tout $t \in]0, +\infty[$, μ_t soit la loi de Y_t.*
b). A toute famille $(\mu_{s,t})_{0\le s<t}$ de probabilités sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ satisfaisant :

$$\forall s, t, u \text{ tels que } 0 \le s < t < u,\ \mu_{s,u} = \mu_{s,t} * \mu_{t,u},$$

correspond un P.A.I. $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, unique à une équivalence près, tel que $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 \le s < t$, $Y_t - Y_s$ ait pour loi $\mu_{s,t}$.

Remarque : Le a). permet en particulier de prouver l'existence du processus de Poisson homogène et du mouvement Brownien réel, le b). celle du processus de Poisson non homogène.

Démonstration. b). : Soit $I = \{t_1, \ldots, t_n\}$ avec $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $\mathbb{P}_I$ la probabilité image de $\mu_{0,t_1} \otimes \mu_{t_1,t_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{n-1},t_n}$, par l'application $\phi_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.
Montrons que $(\mathbb{P}_I)_I$ est compatible :
Soit $J = \{t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}\}$ avec $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, (et $k < n$). On a :

$$\mathbb{P}_J = \phi_k \cdot (\mu_{0,t_{i_1}} \otimes \mu_{t_{i_1},t_{i_2}} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{i_{k-1}},t_{i_k}}),$$

c'est à dire la mesure image par ϕ_k de la mesure $\mu_{0,t_{i_1}} \otimes \mu_{t_{i_1},t_{i_2}} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{i_{k-1}},t_{i_k}}$.
Or,

$$\mu_{0,t_{i_1}} \otimes \mu_{t_{i_1},t_{i_2}} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{i_{k-1}},t_{i_k}} = \gamma \cdot (\mu_{0,t_1} \otimes \mu_{t_1,t_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{n-1},t_n}),$$

avec

$$\gamma(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\sum_{0<i\le i_1} x_i, \sum_{i_1<i\le i_2} x_i, \ldots, \sum_{i_{k-1}<i\le i_k} x_i\Big).$$

Donc,

$$\mathbb{P}_J = (\phi_k \circ \gamma) \cdot (\mu_{0,t_1} \otimes \mu_{t_1,t_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{n-1},t_n}).$$

Il est facile de voir que $\phi_k \circ \gamma = \Pi \circ \phi_n$ où $\Pi := \Pi_{I,J}$. On en déduit alors que

$$\mathbb{P}_J = \Pi \cdot (\phi_n \cdot (\mu_{0,t_1} \otimes \mu_{t_1,t_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_{n-1},t_n})) = \Pi_{I,J} \cdot \mathbb{P}_I.$$

□

Corollaire 1.3.2. *Soit m une application de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}$ et soit c une application semi-définie positive de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}$. Il existe alors un processus gaussien réel, unique à une équivalence près, admettant m comme moyenne et c comme covariance.*

Démonstration. Soit $I = \{t_1, \ldots, t_n\}$ avec $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $\mathbb{P}_I$ la probabilité gaussienne sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ de moyenne $(m(t_1), \ldots, m(t_n))$ et de matrice de covariance $(c(t_i, t_j))_{i,j=1,\ldots n}$. Soit $J \subset I$, alors $\Pi_{I,J} \cdot \mathbb{P}_I$ et $\mathbb{P}_J$ sont deux probabilités gaussiennes de même moyenne et même covariance. Donc, $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ est compatible et on conclut au moyen du théorème de Kolmogorov.

□

Exemple : Prenons $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$. La fonction c définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par $c(s, t) = s \wedge t$ est une fonction de covariance car $\forall s_1, \ldots, s_n$ tels que $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n$, la matrice $(s_i \wedge s_j)_{i,j=1,\ldots,n}$ est semi-définie positive puisque c'est la matrice de covariance de $(U_1, U_1 + U_2, \ldots, U_1 + \ldots + U_n)$ où $(U_1, \ldots, U_n)$ sont des v.a.r. indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0, s_1)$ pour U_1 et $\mathcal{N}(0, s_k - s_{k-1})$ pour U_k.

EXERCICES

Exercice 1.1 : Démontrer le théorème des classes monotones suivant :

Théorème 1.3.2. *Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω, ensemble non vide, qui est stable par intersection finie. Alors, la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$ coincide avec la plus petite famille $\mathcal{D}$ de parties de Ω contenant $\mathcal{C}$, avec $\Omega \in \mathcal{D}$, qui soit stable par différence et par limite croissante.*

Exercice 1.2 : Démontrer le corollaire suivant du théorème des classes monotones.

Corollaire 1.3.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω contenue dans $\mathcal{F}$, stable par intersection finie et telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$.*
Soit $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui coincident sur $\mathcal{C}$ (i.e. telles que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$, $\forall A \in \mathcal{C}$). Alors, on a $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

Exercice 1.3 : Montrer qu'un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ $d-$dimensionnel est un P.A.I. si et seulement si, posant $\mathcal{F}_t^o = \sigma(X_s; s \leq t)$, on a : $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. et si, $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$ avec $s < t$, la v.a. $X_t - X_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s^o$.
(Indication : Utiliser le théorème des classes monotones pour montrer que si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un P.A.I., la v.a. $X_t - X_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s^o$).

Exercice 1.4 : Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est dit *auto-similaire* (d'ordre 1) si, pour tout $\lambda > 0$, les processus stochastiques $(X_{\lambda t})_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(\lambda\, X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont équivalents.
Montrer que, si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, le processus $(B_{t^2})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est auto-similaire (d'ordre 1).

Exercice 1.5 : Montrer que, si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, les processus stochastiques suivants sont aussi des mouvements Browniens réels :
a)$(-B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
b) $(c\, B_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\forall c > 0$.
c) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ défini par : $X_0 = 0$ et par $X_t = t\, B_{1/t}$, $\forall t > 0$.

Exercice 1.6 : Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose pout $t \in [0, 1]$, $Y_t = B_t - t\, B_1$ et $Z_t = Y_{1-t}$.
a) Montrer que $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ et $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ sont des processus Gaussiens centrés et comparer leurs lois de dimension finie.
b) On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $W_t = (t + 1)Y_{t/(1+t)}$. Montrer que $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un

mouvement Brownien réel.

Exercice 1.7 : Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\lambda > 0$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $U_t = e^{-\lambda t} B_{e^{2\lambda t}}$.
a) Montrer que $(U_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus Gaussien centré et déterminer sa covariance c.
b) Déduire de la forme de c que $(U_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est *stationnaire au sens strict*, i.e. que :
$\forall n \geq 1$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$, $\forall s > 0$, avec $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, les v.a. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$ ont la même loi.

Exercice 1.8 : Soit d un entier plus grand ou égal à 2. $< .,. >$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ et $||.||$ la norme euclidienne associée. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère d mouvements Browniens réels indépendants $(B_t^1)_{t\in\mathbb{R}^+}, (B_t^2)_{t\in\mathbb{R}^+}, \ldots, (B_t^d)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et on pose pour $t \in \mathbb{R}^+$, $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$. ($(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel d-dimensionnel).
a) Montrer que $\forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $||x|| = 1$, le processus stochastique réel $(< B_t, x >)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel.
b) On prend $d = 2$ et on pose $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ avec

$$X_t^1 = B^1_{\frac{2t}{3}} - B^2_{\frac{t}{3}} \quad \text{et } X_t^2 = B^2_{\frac{2t}{3}} + B^1_{\frac{t}{3}}$$

Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est de norme 1, que peut-on dire du processus $(< X_t, x >)_{t\in\mathbb{R}^+}$? Les processus stochastiques $(X_t^1)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X_t^2)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont-ils indépendants ? Sont-ils des mouvements Browniens réels ?
c) Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+} = (X_t^1, \ldots, X_t^d)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus stochastique $d-$dimensionnel tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ de norme 1, $(< X_t, x >)_{t\in\mathbb{R}^+}$ soit un mouvement Brownien réel, $(X_t^1)_{t\in\mathbb{R}^+}, \ldots, (X_t^d)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont-ils des mouvements Browniens réels indépendants ?

Exercice 1.9 : Montrer que la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}$ sur $E^{\mathbb{T}}$ coincide avec la tribu engendrée par les cylindres de $E^{\mathbb{T}}$, i.e. par les ensembles $B = \prod_{t\in\mathbb{T}} A_t$ où $A_t \in \mathcal{E}, \forall\, t \in \mathbb{T}$ et $A_t = E$ sauf pour un nombre fini de t.

Chapitre 2

Processus de Poisson standard et mouvement Brownien réel standard

2.1 Processus ponctuel. Processus de Poisson standard

L'objet de ce paragraphe est l'étude des répartitions aléatoires de points sur $]0, +\infty[$.

Un processus ponctuel sur $]0, +\infty[$ est une suite $(S_k)_{k\geq 1}$ de v.a.r., définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que l'on ait : $0 < S_1(\omega) < S_2(\omega) < \ldots < S_k(\omega) < \ldots$ et $\lim_{k\to+\infty} S_k(\omega) = +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$. Les S_k représentent les instants d'arrivée du phénomène aléatoire étudié, par exemple une suite d'appels téléphoniques, les instants d'arrivées de clients dans une file d'attente...
On pose également : $Z_1 = S_1$ et pour tout $k \geq 2$, $Z_k = S_k - S_{k-1}$ (délai entre les arrivées successives). Donc, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.
A tout processus ponctuel $(S_k)_{k\geq 1}$ sur $]0, +\infty[$, on associe un processus stochastique appelé *fonction aléatoire de comptage* $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ défini de la manière suivante : $N_0(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ et

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{S_n(\omega)\leq t\}}(\omega)$$

le nombre d'arrivées durant l'intervalle de temps $]0, t]$.
Comme $\lim_{k\to+\infty} S_k(\omega) = +\infty$, on a $N_t(\omega) < +\infty$ pour tout $t > 0$ et tout $\omega \in \Omega$. De plus, $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et toutes ses trajectoires sont croissantes au sens large, continues à droite, en escalier avec sauts unité seulement. La donnée du processus ponctuel $(S_k)_{k\geq 1}$ équivaut à celle du processus stochastique $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ en remarquant que ($S_0 \equiv 0$)

$$\{N_t = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$$

On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{N_t < n\} = \{S_n > t\}$.

Théorème 2.1.1. *Si les v.a.r. Z_k sont indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ, alors on a :*
a) Pour tout $t > 0$, la v.a.r. N_t a la loi de Poisson de paramètre λt.
b) $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un P.A.I.S.

Démonstration. a). La v.a. S_n étant la somme de n v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ suit une loi Gamma de densité $g_n(x) = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t < n) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_t^{+\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx \\ &= e^{-\lambda t}\Big(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big) \end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(N_t < 1) = e^{-\lambda t}$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t < n+1) - \mathbb{P}(N_t < n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

□

On appelle *processus de Poisson standard* tout processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tel que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ soit un processus de Poisson tel que $X_0 \equiv 0$ et tel que toutes les trajectoires soient croissantes au sens large, continues à droite, en escalier avec sauts unité seulement. On a la réciproque suivante du théorème précédent :

Théorème 2.1.2. *Supposons que la fonction aléatoire de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ du processus ponctuel $(S_k)_{k\geq 1}$ est un P.A.I.S..*
a) Il existe $\lambda > 0$ telle que la v.a.r. Z_1 ait la loi exponentielle de paramètre λ.
b) Pour tout $t > 0$, la v.a.r. N_t a la loi de Poisson de paramètre λt.
c) La suite $(Z_k)_{k\geq 1}$ est formée de v.a.r. indépendantes de même loi, la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration. a). En remarquant que $\{Z_1 > t\} = \{N_t = 0\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 > t+s) &= \mathbb{P}(N_{t+s} = 0) \\ &= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = 0, N_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = 0)\mathbb{P}(N_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(N_t = 0)\mathbb{P}(N_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_1 > t)\mathbb{P}(Z_1 > s) \end{aligned}$$

La fonction $t \to \mathbb{P}(Z_1 > t)$ étant à valeurs dans $[0,1]$, décroissante au sens large, et telle que $\mathbb{P}(Z_1 > 0) = 1$, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}(Z_1 > t) = e^{-\lambda t} = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

□

2.2 Critère de régularité de Kolmogorov. Construction du mouvement Brownien réel standard

Le théorème suivant dû à A. N. Kolmogorov est très pratique pour montrer qu'un processus stochastique donné est à trajectoires continues à modification près. Il va nous permettre en particulier de prouver le théorème 1.1.2 du chapitre 1.

Théorème 2.2.1. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus stochastique d-dimensionnel tel qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $C > 0$ pour lesquels on ait pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$,*

$$\mathbb{E}(||X_t - X_s||^\alpha) \leq C|t-s|^{1+\beta}$$

($||.||$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$).
Alors, il existe une modification $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ dont toutes les trajectoires sont continues.

Comme application directe du théorème, on a le

Corollaire 2.2.1. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, il existe une modification $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ dont toutes les trajectoires sont continues. $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est donc un mouvement Brownien réel standard au sens du chapitre 1.*

Démonstration. Un petit calcul montre que pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^4] = 3(t-s)^2.$$

On applique le théorème avec $\alpha = 4, \beta = 1$ et $C = 3$. □

On prouve maintenant le théorème de Kolmogorov.

Démonstration. Il suffit de montrer que la restriction à l'ensemble des dyadiques D de $\mathbb{R}^+$ de l'application $t \to X_t(\omega)$ est $\mathbb{P}-$p.s. uniformément continue sur $D \cap [0, N]$, pour tout entier $N \geq 1$. En effet, l'ensemble $D \cap [0, N]$ étant dense dans $[0, N]$ et l'espace métrique $([0, N], |.|)$ étant complet, on en déduit, de manière classique, que la restriction à D de la trajectoire $t \to X_t(\omega)$ peut se prolonger, pour $\mathbb{P}-$p.s. tout ω, d'une manière unique en une application continue $t \to X'_t(\omega)$. On posera $X'_t(\omega) = \lim_{s\to t, s\in D} X_s(\omega)$ pour ces ω. On posera aussi $X'_t(\omega) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ sur l'ensemble négligeable. Alors, $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une modification continue de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, en effet, en utilisant le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(||X'_t - X_t||^\alpha) &= \mathbb{E}(\lim_{s\to t, s\in D} ||X_t - X_s||^\alpha) \\ &\leq \liminf_{s\to t, s\in D} \mathbb{E}(||X_t - X_s||^\alpha) \\ &\leq C \lim_{s\to t, s\in D} |t-s|^{1+\beta} = 0.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X'_t = X_t \ \ \mathbb{P}-$p.s..
Nous prouvons maintenant l'uniforme continuité $\mathbb{P}-$p.s. de $t \to X_t(\omega)$ sur $D \cap [0, N]$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. On commence par estimer $||X_t - X_s||$ lorsque s et t sont deux dyadiques consécutifs (c'est à dire du type $s = k/2^p$ et $t = (k+1)/2^p$). On pose pour $\gamma > 0$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$A_p(\gamma) = \bigcup_{k=0}^{N2^p-1} \{||X_{(k+1)/2^p} - X_{k/2^p}|| > \frac{1}{2^{p\gamma}}\}$$

D'après l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_p(\gamma)) &\leq \sum_{k=0}^{N2^p-1} \mathbb{P}(||X_{(k+1)/2^p} - X_{k/2^p}|| > \frac{1}{2^{p\gamma}}) \\
&\leq \sum_{k=0}^{N2^p-1} 2^{p\gamma\alpha}\mathbb{E}(||X_{(k+1)/2^p} - X_{k/2^p}||^\alpha) \\
&= 2^{p\gamma\alpha}(N2^p)C\frac{1}{2^{p(1+\beta)}} = NC\frac{1}{2^{p(\beta-\gamma\alpha)}}
\end{aligned}$$

Donc, si $\gamma < \beta/\alpha$, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup_p A_p(\gamma)) = 0.$$

En posant $B_N(\gamma) = \liminf_p A_p(\gamma)^c$, $\mathbb{P}(B_N(\gamma)) = 1$ et si $\omega \in B_N(\gamma)$, il existe $n_{N,\gamma}(\omega)$ tel que pour tout $p \geq n_{N,\gamma}(\omega)$, on ait pour tout $k = 0, 1, \ldots, N2^p - 1$,

$$||X_{(k+1)/2^p}(\omega) - X_{k/2^p}(\omega)|| \leq \frac{1}{2^{p\gamma}}.$$

Considérons $s, t \in D \cap [0, N]$ tels que $0 < t - s \leq 1/2^m$. On associe à s et t deux suites croissantes au sens large $(s_p)_{p\geq 0}$ et $(t_p)_{p\geq 0}$ de dyadiques d'ordre p (c'est à dire $s_p = k/2^p$ et $t_p = k'/2^p$) telles que $s_p \uparrow s$, $t_p \uparrow t$, ces suites étant constantes à partir d'un certain rang. On écrit

$$X_t - X_s = (X_{t_m} + \sum_{p=m}^{+\infty}(X_{t_{p+1}} - X_{t_p}))$$

$$-(X_{s_m} + \sum_{p=m}^{+\infty}(X_{s_{p+1}} - X_{s_p}))$$

(somme finies en fait) Donc, si $\omega \in B_N(\gamma)$, on a

$$||X_t(\omega)-X_s(\omega)|| \leq ||X_{t_m}(\omega)-X_{s_m}(\omega)||+\sum_{p=m}^{+\infty} ||X_{t_{p+1}}(\omega)-X_{t_p}(\omega)||+\sum_{p=m}^{+\infty} ||X_{s_{p+1}}(\omega)-X_{s_p}(\omega)||$$

Or, comme $|t-s| \leq 1/2^m$, et $s \leq t$, on a $s_m = t_m$ ou $t_m = s_m + \frac{1}{2^m}$. De plus, t_{p+1} (resp. s_{p+1}) est soit égal à t_p (resp. s_p) ou $t_p + 1/2^{p+1}$ (resp. $s_p + 1/2^{p+1}$), on a donc l'inégalité

$$\begin{aligned} ||X_t(\omega) - X_s(\omega)|| &\leq \frac{1}{2^{m\gamma}} + 2\sum_{p=m}^{+\infty} \frac{1}{2^{(p+1)\gamma}} \\ &\leq 2\sum_{p=m}^{+\infty} \frac{1}{2^{p\gamma}} = \frac{1}{2^{m\gamma}} \frac{2}{1-1/2^{\gamma}} \leq \epsilon \end{aligned}$$

si m est suffisamment grand. On a prouvé que si $\omega \in B_N(\gamma)$, alors pour tout $s, t \in D \cap [0, N]$ tels que $|t-s| \leq 1/2^m$,

$$||X_t(\omega) - X_s(\omega)|| \leq \frac{K}{2^{m\gamma}},$$

d'où l'uniforme continuité sur $D \cap [0, N]$ de $t \to X_t(\omega)$ pour tout $\omega \in B_N(\gamma)$. □

On a en fait prouvé le résultat suivant

Théorème 2.2.2. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus stochastique $d-$dimensionnel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $C > 0$ pour lesquels on ait pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$,*

$$\mathbb{E}(||X_t - X_s||^{\alpha}) \leq C|t-s|^{1+\beta}.$$

Alors, pour tout $\gamma \in]0, \frac{\beta}{\gamma}[$, il existe une modification $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ telle que pour tout $N \geq 1$, la restriction à $[0, N]$ de la trajectoire $t \to X'_t(\omega)$ ait une continuité de Hölder d'ordre γ, pour tout $\omega \in \Omega$.

Corollaire 2.2.2. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel. Il existe alors une modification $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ telle que, pour $\mathbb{P}-p.s.$ tout ω, pour tout $N \geq 1$, la restriction à $[0, N]$ de $t \to B_t(\omega)$ ait une continuité de Hölder d'ordre γ pour tout $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$.*

Démonstration. Pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, la v.a.r. $X_t - X_s$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, |t-s|)$. Donc, on a

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^{2p}] = C_p|t-s|^p < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème avec $\alpha_p = 2p$ et $\beta_p = p - 1$. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ admet une modification $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ayant une continuité de Hölder d'ordre $\gamma < \beta_p/\alpha_p$. Comme $\beta_p/\alpha_p \to 1/2$ lorsque p tend vers l'infini, on a le résultat voulu. □

On voit donc que si B est un mouvement Brownien, on peut toujours le remplacer par un processus B' tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}(B'_t = B_t) = 1$ et tel que B' soit à trajectoires continues (même höldériennes d'exposant γ pour $\gamma < 1/2$).

2.3 Processus variation quadratique et application au mouvement Brownien réel

Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus stochastique à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ admet *une variation quadratique* s'il existe un processus stochastique réel $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ tel que l'on ait :
pour tout $t > 0$, pour toute suite de subdivisions $(\Delta_n)_n = (t_j^n)_{j=0,..,j(n)}$ de $[0, t]$ dont le pas $|\Delta_n| = \sup_{i=0,\ldots,j(n)-1} |t_{i+1}^n - t_i^n|$ tend vers 0, la suite de v.a.r.

$$T_t^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=0}^{j(n)-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

converge en probabilité, quand $n \to +\infty$, vers Y_t. On note

$$Y_t = \langle X, X \rangle_t \quad (\text{ou } \langle X \rangle_t).$$

$(\langle X, X \rangle_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ s'appelle *la variation quadratique de* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Théorème 2.3.1. *Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, alors X admet une variation quadratique et $\mathbb{P}-$p.s.,*

$$\langle X, X \rangle_t = t, \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Démonstration. Il suffit de montrer la convergence dans L^2 de $T_t^{\Delta_n}(X)$ vers t quand n tend vers l'infini. Soit Δ_n une subdivision de $[0, t]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(T_t^{\Delta_n}(X) - t)^2] &= \mathbb{E}[(\sum_{i=0}^{j(n)-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n))^2] \\ &= \sum_{i=0}^{j(n)-1} \mathbb{E}[((X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n))^2], \end{aligned}$$

en utilisant le fait que les accroissements sont indépendants et que

$$\mathbb{E}[(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)] = 0.$$

Un petit calcul montre que

$$\mathbb{E}[((X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n))^2] = 2(t_{i+1}^n - t_i^n)^2.$$

(Remarquer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbb{E}(Y^4) = 3[\mathbb{E}(Y^2)]^2$), donc

$$\mathbb{E}[(T_t^{\Delta_n}(X) - t)^2] = 2 \sum_{i=0}^{j(n)-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \leq 2|\Delta_n| t$$

Si $|\Delta_n| \to 0$, alors $\mathbb{E}[(T_t^{\Delta_n}(X) - t)^2]$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. $\square$

On note $\mathcal{S}_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions $\Delta = (t_i)_{i=0,\dots,j(\Delta)}$ de $[a,b]$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On appelle *variation de f sur* $[a,b]$ le réel $M \in [0,+\infty]$ défini par

$$M = \sup_{\Delta \in \mathcal{S}_{[a,b]}} \left(\sum_{i=0}^{j(\Delta)-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \right)$$

où $\Delta = (t_i)_{i=0,\dots,j(\Delta)}$. On la note $V_f([a,b])$. On dit que f est à variation finie sur $[a,b]$ si on a $V_f([a,b]) < +\infty$. (f est aussi dite à variation bornée sur $[a,b]$). Lorsque $V_f([a,b]) = +\infty$, on dit que f est à variation infinie sur $[a,b]$ (ou à variation non bornée sur $[a,b]$). Les fonctions f monotones ou de classe C^1 sont à variation finie sur tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}^+$. On énonce dans le corollaire suivant un résultat important sur les trajectoires browniennes qui est à l'origine de l'intégration stochastique.

Corollaire 2.3.1. *Si $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel standard, alors, pour $\mathbb{P}-$presque tout ω, la trajectoire $t \to B_t(\omega)$ est à variation infinie sur tout intervalle $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $a < b$.*

Démonstration. Pour obtenir un ensemble négligeable ne dépendant pas de l'intervalle $[a,b]$ considéré, on raisonne sur des intervalles $[p,q]$ à extrêmités rationnelles. Soit $[p,q]$ un tel intervalle avec $q > p$. Il existe, d'après le théorème ci-dessus, une suite $(\Delta_n)_n$ de subdivisions de $[p,q]$ dont le pas tend vers 0 telle que $\mathbb{P}-$presque sûrement,

$$T_{p,q}^{\Delta_n}(B) = \sum_{t_i \in \Delta_n} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)^2 \to q - p.$$

On pose alors

$$\Omega_0 = \{w : t \to B_t(\omega) \text{ soit continue}\}$$

et pour $p, q \in \mathbb{Q}^+$ tels que $p < q$,

$$\Omega_{p,q} = \{w : T_{p,q}^{\Delta_n}(B)(\omega) \to q - p\}.$$

Donc, si $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_{p,q}$ et si $V_B(\omega)$ désigne la variation de $t \to B_t(\omega)$ sur $[p,q]$, alors on a l'inégalité

$$T_{p,q}^{\Delta_n}(B)(\omega) = \sum_{t_i \in \Delta_n} \left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega) \right)^2 \le V_B(\omega) \sup_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|.$$

Si $V_B(\omega)$ était finie, en faisant tendre n vers l'infini, on obtiendrait que :

$$T_{p,q}^{\Delta_n}(B)(\omega) \to 0,$$

contredisant le fait que $\omega \in \Omega_{p,q}$.
On conclut en posant

$$\Omega_1 = \Omega_0 \cap \left(\bigcap_{p<q\in\mathbb{Q}^+} \Omega_{p,q} \right).$$

On a $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ et d'après ce qui précède, si $\omega \in \Omega_1$, la trajectoire $t \to B_t(\omega)$ est à variation infinie sur tous les intervalles à extrémités rationnelles donc sur tous les intervalles compacts. □

Remarque : On montre en utilisant le même type d'arguments que pour tout $\gamma > \frac{1}{2}$, les trajectoires du mouvement Brownien n'ont $\mathbb{P}-$p.s. pas de continuité de Hölder d'ordre γ. En fait, ce résultat est même vrai pour $\gamma = \frac{1}{2}$, la preuve nécessite une autre approche qu'on ne détaillera pas ici.

Corollaire 2.3.2. *Les trajectoires du mouvement Brownien sont $\mathbb{P}-$p.s. nulle part dérivables.*

Démonstration. On se restreint pour simplifier à l'intervalle de temps $[0, 1]$. On fixe $C > 0$ et on considère les ensembles

$$A_n = \{w : \exists s \text{ t.q. } |B_t - B_s| \leq 2C|t-s| \text{ si } \ |t-s| \leq 2/n\}$$

Les A_n forment une suite croissante d'événements dont la réunion A contient l'ensemble des trajectoires ayant en un certain point une dérivée inférieure en valeur absolue à C. Définissons les variables aléatoires

$$Y_k = \max(|B_{k+2/n} - B_{k+1/n}|, |B_{k+1/n} - B_{k/n}|, |B_{k/n} - B_{k-1/n}|).$$

Si s est à une distance de 0 et de 1 supérieure à $1/n$, on peut choisir k comme le plus grand entier tel que $k/n \leq s$ et montrer alors que A_n est inclus dans l'ensemble

$$B_n = \left\{ w : \text{au moins un } Y_k \leq \frac{6C}{n} \right\} = \bigcup_{k=1}^{n-2} \left\{ Y_k \leq \frac{6C}{n} \right\}.$$

(Le cas où s est à une distance de 0 ou de 1 inférieure à $1/n$ se traite de manière similaire).
Il reste donc à montrer que $\mathbb{P}(B_n)$ tend vers 0. Or,

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n-2} \{Y_k \leq \frac{6C}{n}\}) \leq n\mathbb{P}(Y_1 \leq \frac{6C}{n}\}) \\ &\leq n(\mathbb{P}(|B_{1/n}| \leq 6C/n\}))^3 \\ &= n\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-6C/n}^{6C/n} e^{-nx^2/2} dx\right)^3 \\ &= n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-6C}^{6C} e^{-x^2/2n} dx\right)^3 = \mathcal{O}(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A) = 0$. □

Chapitre 3

Martingales

3.1 Filtration. Processus adapté. Martingale

Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante (au sens large) de sous-tribus de $\mathcal{F}$ (i.e. $s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$). On appelle *espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. La tribu $\mathcal{F}_t$ est appelée *tribu des événements antérieurs au temps t.*

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est dite *continue à droite* si $\forall t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

A toute filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, on peut associer la filtration continue à droite notée $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\in\mathbb{R}^+}$ définie par

$$\mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

On dit que $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est *complète* (pour $\mathbb{P}$) si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$ (pour $\mathbb{P}$). Si $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on lui associe *sa filtration complétée* (pour $\mathbb{P}$) : $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ en ajoutant à chaque $\mathcal{F}_t$ les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. On suppose en général que $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est complète sinon on lui associe sa complétée $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ pour $\mathbb{P}$.

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. *La filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *associée à* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est définie par :

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t), \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est dit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$*-adapté* si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable. Tout processus stochastique est trivialement adapté à sa filtration naturelle. Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$. Si $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est complète pour $\mathbb{P}$, si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est

$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté et si $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une modification de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, alors $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est aussi adapté.

Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est *une sur-martingale relativement à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si :
i) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté.
ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t est intégrable.
iii) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, on a :

$$X_s \geq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s), \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est *une sous-martingale relativement à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si $(-X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale c'est à dire si :
i) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté.
ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t est intégrable.
iii) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, on a :

$$X_s \leq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s), \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est *une martingale relativement à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale et une sous-martingale, c'est à dire si
i) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté.
ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t est intégrable.
iii) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, on a :

$$X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s), \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Remarques :
a) . Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale, la fonction $t \rightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est décroissante (au sens large).
. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous-martingale, la fonction $t \rightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est croissante (au sens large).
. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale, la fonction $t \rightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est constante :

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0), \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

b). Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sur-martingale (resp. : une sous-martingale) et si la fonction $t \rightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est constante alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale. (Le montrer !)

Exemple :
Soit $U \in L^1$ et $M_t = \mathbb{E}(U|\mathcal{F}_t), \forall t \in \mathbb{R}^+$, alors $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale.

Un processus stochastique d-dimensionnel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-*P.A.I.* si :
i). $X_0 = 0$, $\mathbb{P}$-p.s.
ii). $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$- adapté.
iii). $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, la v.a. $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Un processus stochastique d-dimensionnel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-*P.A.I.S.* si c'est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-P.A.I. et si :
iv). $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tels que $s \leq t$, la v.a. $X_t - X_s$ a même loi que X_{t-s}.

Remarques :
a). Un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-P.A.I. est en particulier un P.A.I..
b). Un P.A.I. est un $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$-P.A.I..

Théorème 3.1.1. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-P.A.I. réel et si, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t est intégrable et centrée, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-martingale.*

Démonstration. Si $s \leq t$ avec $s, t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s) = \mathbb{E}(X_t) - \mathbb{E}(X_s) = 0, \mathbb{P} - p.s.$$

Or

$$\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s, \mathbb{P} - p.s.$$

Donc,

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s, \mathbb{P} - p.s.$$

□

On déduit facilement du théorème le résultat suivant.

Corollaire 3.1.1. *a). Si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, alors $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$ mais aussi pour la filtration naturelle complétée $(\bar{\mathcal{F}}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$.*
b). Si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ alors $(N_t - \lambda t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à la filtration naturelle de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Proposition 3.1.1. *a). Si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel, alors $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale pour la filtration naturelle complétée de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.*
Pour tout $\alpha \neq 0$, $(\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est aussi une martingale pour la filtration naturelle complétée $(\bar{\mathcal{F}}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

b). Si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ alors $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
Pour tout $\alpha \neq 0$, $(\exp(\alpha N_t - (e^\alpha - 1)\lambda t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est aussi une martingale pour $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Théorème 3.1.2. [Inégalités de Doob]
a). Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une sous-martingale continue à droite relativement à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$*, alors pour tout* $t > 0$*, pour tout* $c > 0$*,*

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} X_s \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_t|)}{c}.$$

b). Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une martingale continue à droite telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$*,* $X_t \in L^p$*, avec* $p > 1$ *fixé, alors pour tout* $t > 0$*,pour tout* $c > 0$*,*

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |X_s| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_t|^p)}{c^p}.$$

c). Sous les hypothèses du b), on obtient que : $\sup_{s\in[0,t]} |X_s| \in L^p$ *et*

$$|| \sup_{s\in[0,t]} |X_s| ||_p \leq C||X_t||_p,$$

où $C = p/(p-1)$ *exposant conjugué de* p*.*
(Cas particulier important : $p = 2, C = 2$*).*

Démonstration. On démontre le point a). à partir du lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Soit* $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une sous-martingale relativement à une filtration* $(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, alors pour tout* $m \geq 1$*, pour tout* $c > 0$*,*

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq m} Y_k \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|Y_m|)}{c}.$$

Démonstration du lemme : Posons pour $k \geq 1$,

$$A_k = \{Y_0 < c\} \cap \ldots \cap \{Y_{k-1} < c\} \cap \{Y_k \geq c\}$$

et $A_0 = \{Y_0 \geq c\}$. Soit $A = \{\max_{0\leq k\leq m} Y_k \geq c\}$. Comme A est une réunion disjointe des A_k, on obtient

$$\begin{aligned} c\,\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=0}^{m} c\,\mathbb{P}(A_k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}(Y_k \mathbf{1}_{A_k}) \end{aligned}$$

Fixons $k \geq 0$, $A_k \in \mathcal{G}_k$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_k \mathbf{1}_{A_k}) &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_m|\mathcal{G}_k)\mathbf{1}_{A_k}) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_m \mathbf{1}_{A_k}|\mathcal{G}_k)) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|Y_m|\mathbf{1}_{A_k}|\mathcal{G}_k)) = \mathbb{E}(|Y_m|\mathbf{1}_{A_k}) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} c\,\mathbb{P}(A) &\leq \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}(|Y_m|\mathbf{1}_{A_k}) \\ &= \mathbb{E}(|Y_m|\mathbf{1}_A) \leq \mathbb{E}(|Y_m|) \end{aligned}$$

$\square$

On applique le lemme, pour $n \geq 1$, à

$$Y_k^{(n)} = X_{\frac{k}{2^n}}$$

avec $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- Si $t \in D$ l'ensemble des dyadiques de $\mathbb{R}^+$, on obtient, en faisant tendre n vers $+\infty$, que

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]\cap D} X_s \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_t|)}{c}.$$

Or, comme $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est continue à droite, $\sup_{s\in[0,t]} X_s = \sup_{s\in[0,t]\cap D} X_s$, d'où le a) du théorème lorsque $t \in D$.
- Si $t \notin D$, on utilise une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ de dyadiques telle que $t_n \downarrow t$, comme $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est continue à droite,

$$\sup_{s\in[0,t]} X_s = \lim_n \downarrow \sup_{s\in[0,t_n]} X_s.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t_n]} X_s \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_{t_n}|)}{c},$$

on obtient le a) pour $t \notin D$ en remarquant que

$$\mathbb{E}(|X_{t_n}|) \to \mathbb{E}(|X_t|)$$

car $(|X_t|)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous-martingale (On le prouvera par la suite!). $\square$

Application du a) du théorème 3.1.2 :

Proposition 3.1.2. *Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel standard. On pose :*

$$S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s.$$

Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(S_t \geq a\ t) \leq \exp(-\frac{a^2 t}{2}).$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où toutes les trajectoires de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont continues. Utilisons les martingales $(M_t^{(\alpha)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ définies, pour $\alpha > 0$, par :

$$M_t^{(\alpha)} = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t).$$

On a :

$$\begin{aligned} \exp(\alpha\ S_t - \frac{\alpha^2}{2}t) &= \exp(\alpha(\sup_{s\in[0,t]} B_s) - \frac{\alpha^2}{2}t) \\ &\leq \sup_{s\in[0,t]} M_s^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Comme, pour $\alpha > 0$, $x \to \exp(\alpha x)$ est strictement croissante, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t \geq a\ t) &= \mathbb{P}(\exp(\alpha\ S_t - \frac{\alpha^2}{2}t) \geq \exp(\alpha a t - \frac{\alpha^2}{2}t)) \\ &\leq \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} M_s^{(\alpha)} \geq \exp(\alpha a t - \frac{\alpha^2}{2}t)) \\ &\leq \exp(-\alpha a t + \frac{\alpha^2}{2}t)\ \mathbb{E}(|M_t^{(\alpha)}|) \text{ par la première inégalité de Doob} \\ &= \exp(-\alpha a t + \frac{\alpha^2}{2}t)\ \mathbb{E}(M_0^{(\alpha)}) = \exp(-\alpha a t + \frac{\alpha^2}{2}t) \end{aligned}$$

Or $\inf_{\alpha>0}(-\alpha a t + \frac{\alpha^2}{2}t) = -\frac{a^2 t}{2}$, d'où le résultat. □

3.2 Temps d'arrêt. Adaptation forte.

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Un temps d'arrêt* relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une application $T : \Omega \to [0, +\infty]$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

On note $\mathcal{T}$ la famille des temps d'arrêt. On pose :

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathcal{F}_t).$$

Soit T un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. On appelle *tribu des événements antérieurs à* T et on note $\mathcal{F}_T$ la famille des éléments A de $\mathcal{F}_\infty$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On vérifie que $\mathcal{F}_T$ est bien une tribu.

Propriétés des temps d'arrêt :

a). Si $T \equiv t$, T est un temps d'arrêt.
b). Si $T \in \mathcal{T}$ et si $S = T + t$ avec $t \in \mathbb{R}^+$, alors $S \in \mathcal{T}$.
c). Si $T \in \mathcal{T}$, alors T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.
d). Si $S, T \in \mathcal{T}$, et si $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
e). Si $S, T \in \mathcal{T}$, alors $S \wedge T \in \mathcal{T}$ et $S \vee T \in \mathcal{T}$.

Remarque :
On a le résultat suivant :
$T : \Omega \to [0, +\infty]$ est un $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt ssi

$$\forall t \in]0, +\infty[, \{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Exemples de temps d'arrêt :
Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus stochastique $d-$dimensionnel. On pose :

$$T_A(\omega) = \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in A\}$$

$(+\infty$ si $\{-\} = \emptyset)$.
T_A s'appelle *le temps d'atteinte de A.*

Proposition 3.2.1. *Soit A un ouvert. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est continu à droite, alors T_A est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}^0_{t^+})_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Proposition 3.2.2. *Soit A un fermé. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est continu, alors la v.a. D_A définie par*

$$D_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\}$$

est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}^0_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. D_A s'appelle le temps d'entrée dans A.

Les preuves de ces deux propositions sont laissées en exercices.

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus stochastique $d-$dimensionnel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est *fortement adapté* si pour tout $T \in \mathcal{T}$, l'application $\omega \to X_{T(\omega)}(\omega)\mathbf{1}_{\{T(\omega)<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est fortement adapté, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est en particulier adapté. On va donner des conditions entraînant que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est fortement adapté. On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est *progressivement mesurable* si pour tout $t > 0$, l'application $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable de $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est progressivement mesurable, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est en particulier adapté.

Théorème 3.2.1. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est progressivement mesurable, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est fortement adapté.*

Proposition 3.2.3. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est adapté et continu à droite, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est progressivement mesurable.*

Démonstration. Soit $t > 0$. On définit

$$Y^{(n)}(s, \omega) = \sum_{k=1}^{n} X_{\frac{kt}{n}}(\omega)\mathbf{1}_{[\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}[}(s) + X_t(\omega)\mathbf{1}_{\{t\}}(s).$$

Alors,

$$(s, \omega) \to Y^{(n)}(s, \omega)$$

est mesurable (comme somme d'applications mesurables et car $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est adapté).
Or, comme $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est continu à droite, si n tend vers $+\infty$, $Y^{(n)}(s, \omega)$ tend vers $X_s(\omega)$ donc $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable. $\square$

Démonstration du théorème : On utilise le résultat suivant :
Une application $U : \Omega \to \mathbb{R}^d$ nulle sur l'événement $\{T = +\infty\}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $U.\mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

D'après ce résultat, il suffit de montrer que pour tout $t > 0$, $X_T\mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Pour le voir, on écrit

$$X_T\mathbf{1}_{\{T\leq t\}} = X_{T\wedge t}\mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$$

La variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et $\omega \to X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$ se décompose en $\psi \circ \phi(\omega)$ où $\phi : \omega \to (T(\omega) \wedge t, \omega)$ est mesurable de $\mathcal{F}_t$ dans $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\psi : (s, \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable, par hypothèse, de $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

3.3 Théorème d'arrêt pour des temps d'arrêt bornés

Théorème 3.3.1. [Théorème d'arrêt] *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une martingale continue à droite par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.*
a). Pour tout temps d'arrêt borné S, la v.a. X_S est intégrable et $\mathcal{F}_S$-mesurable.
b). Si S et T sont deux temps d'arrêt bornés et si $S \leq T$, alors

$$X_S = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S).$$

Corollaire 3.3.1. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus stochastique réel adapté et continu à droite. Alors, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale ssi pour tout $T \in \mathcal{T}$ borné, X_T est intégrable et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale alors, d'après le théorème d'arrêt, X_T est intégrable et $X_0 = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_0)$ $(S \equiv 0 \leq T)$, donc $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.
$\Leftarrow$: i) Adaptation : dans les hypothèses.
ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $X_t \in L^1$ (Prendre $T \equiv t$)
iii) Soit $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t$. On veut montrer que $\mathbb{P}$-p.s.,

$$X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$$

i.e. $\mathbb{E}(X_s\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_A), \forall A \in \mathcal{F}_s$.
Soit $A \in \mathcal{F}_s$, on pose

$$T = s\ \mathbf{1}_A + t\ \mathbf{1}_{A^c}.$$

T est un temps d'arrêt borné. Donc, $X_T \in L^1$ et

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_s\mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_{A^c}).$$

et en prenant $T \equiv t$, on obtient que $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_t)$ i.e.

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_{A^c}),$$

ce qui entraîne que $\mathbb{E}(X_s\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_A)$. □

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus stochastique réel adapté et continu à droite et si T est un temps d'arrêt, on note $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}^+}$ le processus stochastique réel défini par :

$$X_t^T = X_{t\wedge T}.$$

Le processus $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}^+}$ s'appelle *le processus arrêté à T.*

Corollaire 3.3.2. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale continue à droite et si T est un temps d'arrêt, alors $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale continue à droite.*

Démonstration. . $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est continue à droite. (évident)
. Pour montrer que c'est une martingale, il suffit de prouver que pour tout temps d'arrêt borné S, on a : $X_S^T \in L^1$ et $\mathbb{E}(X_S^T) = \mathbb{E}(X_0^T)$, d'après le corollaire précédent. Or, $X_S^T = X_{S\wedge T}$ et $S \wedge T$ est un temps d'arrêt borné, donc, par le théorème d'arrêt, on obtient que $X_{S\wedge T} \in L^1$ et $\mathbb{E}(X_{S\wedge T}) = \mathbb{E}(X_0)$. □

Preuve du théorème d'arrêt :
Il suffit de montrer que pour tout temps d'arrêt borné S par c (i.e. $S(\omega) \leq c, \forall\omega \in \Omega$), on a : $X_S \in L^1$ et

$$X_S = \mathbb{E}(X_c|\mathcal{F}_S), \mathbb{P} - p.s.$$

En effet, si S et T sont deux temps d'arrêt avec $S \leq T$ bornés par c, alors

$$X_S = \mathbb{E}(X_c|\mathcal{F}_S), \mathbb{P} - p.s.$$

et

$$X_T = \mathbb{E}(X_c|\mathcal{F}_T), \mathbb{P} - p.s.$$

et par conséquent, comme $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$,

$$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(X_c|\mathcal{F}_T|\mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(X_c|\mathcal{F}_S) = X_S.$$

Soit donc S un temps d'arrêt borné tel que pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) \leq c$. On pose :

$$S_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si} \quad \frac{k-1}{2^n} \leq S(\omega) < \frac{k}{2^n} \text{ pour } 1 \leq k < c2^n. \\ c & \text{sinon} \quad (\text{ i.e. si } S(\omega) = c) \end{cases}$$

Pour tout entier n non nul, S_n est un temps d'arrêt prenant un nombre fini de valeurs. De plus, pour tout $\omega \in \Omega, S_n(\omega) \downarrow S(\omega)$.
Le résultat suivant va nous être utile.

Lemme 3.3.1. *Soit $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une martingale relativement à une filtration $(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*
a). Pour tout temps d'arrêt borné S, $Y_S \in L^1$.
b). Pour tous temps d'arrêt bornés S, T vérifiant $S \leq T$,

$$Y_S = \mathbb{E}(Y_T|\mathcal{G}_S) \quad \mathbb{P} - p.s.$$

On applique le lemme à $(Y_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$Y_k^{(n)} = \begin{cases} X_{\frac{k}{2^n}} & \text{si } 1 \leq k < c2^n. \\ X_c & \text{si } k \geq c2^n, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{G}_k^{(n)} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} & \text{si } 1 \leq k < c2^n. \\ \mathcal{F}_c & \text{si } k \geq c2^n. \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, $(Y_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{G}_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$. On a donc

$$X_{S_n} = \mathbb{E}(X_c|\mathcal{F}_{S_n}),\ \mathbb{P}-p.s.$$

en appliquant le lemme à $(Y_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ et aux temps d'arrêt :

$$T_n = 2^n S_n, T' = c2^n.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, $X_{S_n}(\omega)$ tend vers $X_S(\omega)$ quand n tend vers l'infini (car $S_n \downarrow S$ et par continuité à droite des trajectoires). Si on montre que $X_{S_n} \xrightarrow{L^1} X_S$, on aura $\forall A \in \mathcal{F}_{S_n}$,

$$\int_\Omega X_S \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P} = \lim_n \int_\Omega X_{S_n} \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X_c \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P}.$$

Le fait que $X_S \in L^1$ et la convergence dans L^1 de X_{S_n} vers X_S quand n tend vers l'infini résultent du fait que la suite $(X_{S_n})_n$ est *uniformément intégrable* (ou *équi-intégrable*) au sens suivant :

Une famille de v.a.r. $(U_i)_{i\in I}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est *uniformément intégrable* si

$$\sup_{i\in I} \int_{\{|U_i|\geq\lambda\}} |U_i| \, d\mathbb{P} \to 0$$

quand $\lambda \to +\infty$.

Proposition 3.3.1. *$(U_i)_{i\in I}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est uniformément intégrable ssi*
i) $\sup_{i\in I} \mathbb{E}(|U_i|) < +\infty$.
ii) Propriété d'équicontinuité :
$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ *tel que si* $A \in \mathcal{F}$ *et si* $\mathbb{P}(A) \leq \eta$, *alors*

$$\sup_{i\in I} \left(\int_A |U_i| \, d\mathbb{P} \right) \leq \epsilon.$$

Exemple :
Toute famille $(U_i)_{i\in I}$ de v.a.r. telle qu'il existe une v.a. $U \in L^1$ tel que pour tout $i \in I$,

$$|U_i| \leq U$$

est uniformément intégrable. En particulier, toute famille de v.a.r. bornées est uniformément intégrable.

Théorème 3.3.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. intégrables et soit X une v.a.r.. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) X est intégrable et lorsque $n \to +\infty$, $X_n \overset{L^1}{\to} X$.
ii) Lorsque $n \to +\infty$, $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

Afin de conclure la preuve du théorème d'arrêt, il nous faut donc montrer que $(X_{S_n})_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. On a :

$$X_{S_n} = \mathbb{E}(X_c|\mathcal{F}_{S_n}),\ \mathbb{P}-p.s.$$

donc

$$|X_{S_n}| \leq \mathbb{E}(|X_c|\ |\mathcal{F}_{S_n}),\ \mathbb{P}-p.s.$$

et pour tout $a > 0$,

$$\int_{\{|X_{S_n}|\geq a\}} |X_{S_n}|\, d\mathbb{P} \leq \int_{\{|X_{S_n}|\geq a\}} |X_c|\, d\mathbb{P}.$$

Remarquons que la famille $\{|X_c|\}(X_c \in L^1)$ est uniformément intégrable donc équicontinue. Posons $A_n = \{|X_{S_n}| \geq a\}$, on a d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(|X_{S_n}|) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(|X_c|).$$

Finalement, on obtient

$$\sup_{n\geq 1}\Big(\int_{\{|X_{S_n}|\geq a\}} |X_{S_n}|\, d\mathbb{P}\Big) \leq \sup_{n\geq 1}\Big(\int_{\{|X_{S_n}|\geq a\}} |X_c|\, d\mathbb{P}\Big) \leq \epsilon$$

si on choisit $a \geq \frac{1}{\eta}\mathbb{E}(|X_c|)$.

3.4 Théorèmes de convergence. Théorème d'arrêt pour une martingale uniformément intégrable

Dans ce paragraphe, on étudie les différentes formes de convergence des martingales et on énonce un théorème d'arrêt pour des temps d'arrêt non nécessairement bornés. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Théorème 3.4.1. [Théorème de convergence presque sûre]
a) Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale continue à droite bornée dans L^1 (i.e. $\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$), alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ converge $\mathbb{P}-p.s.$ quand $t \to +\infty$ vers une limite intégrable.
b) Soit $p > 1$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale continue à droite bornée dans L^p (i.e. $\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\mathbb{E}(|X_t|^p) < +\infty$), alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ converge $\mathbb{P}-p.s.$ quand $t \to +\infty$ vers une limite L^p-intégrable.

Remarque :
Lorsque $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous-martingale continue à droite, il suffit pour que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ soit bornée dans L^1 que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}(X_t^+) < +\infty.$$

(ici $x^+ = x \vee 0$)

Corollaire 3.4.1. *Si $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une surmartingale positive continue à droite, alors Y_t converge $\mathbb{P}$-p.s. quand $t \to +\infty$ et la limite est intégrable.*

Démonstration. On pose $X_t = -Y_t$. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une sous-martingale continue à droite et $X_t^+ = (-Y_t)^+ = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$. Le théorème combiné à la remarque précédente nous donne le résultat. □

Démonstration. a) Le a). peut être montré en utilisant la version discrète avec $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ au lieu de $\mathbb{R}^+$ et en posant $Y_k^{(n)} = X_{\frac{k}{2^n}}, \forall n \geq 1, \forall k \geq 0$.
$\forall n \geq 1$, lorsque $k \to +\infty$,

$$Y_k^{(n)} \to Y_\infty^{(n)},\ \mathbb{P} - p.s.$$

avec $Y_\infty^{(n)}$ intégrable.
Notons D_n l'ensemble des dyadiques d'ordre n. Comme $D_{n+1} \subset D_n$, on obtient que les $Y_\infty^{(n)}$ sont égales $\mathbb{P}-$p.s.. On pose alors : $Y_\infty = Y_\infty^{(n_0)}$. On conclut en utilisant la continuité à droite que lorsque $t \to +\infty$,

$$X_t \to Y_\infty,\ \mathbb{P} - p.s..$$

b) Soit $p > 1$. Par le a), lorsque $t \to +\infty$,

$$X_t \to X_\infty \in L^1,\ \mathbb{P} - p.s..$$

Montrons que $X_\infty \in L^p$. D'après le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}(|X_\infty|^p) \leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}(|X_t|^p) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}(|X_t|^p) < +\infty$$

(puisque $|X_t|^p \to |X_\infty|^p$ $\mathbb{P} - p.s.$ quand $t \to +\infty$). □

Théorème 3.4.2. [Théorème de convergence en moyenne d'ordre 1 ou p.]
a). Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une martingale continue à droite.
Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
i). $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ converge dans L^1 quand $t \to +\infty$.
ii). Il existe une v.a.r. X_∞ intégrable telle que :

$$X_t = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t), \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

iii) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est uniformément intégrable.
b). De plus, si $p > 1$ et si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est bornée dans L^p (i.e. $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}(|X_t|^p) < +\infty$) alors la convergence a aussi lieu dans L^p avec $X_\infty \in L^p$.

Démonstration. a). i) $\Rightarrow$ ii) : Notons X_∞ une v.a.r. intégrable telle que X_t converge vers X_∞ dans L^1 lorsque $t \to +\infty$. Soit $0 \leq s < t$. On a $\mathbb{P}-$p.s.,

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s.$$

En faisant tendre t vers l'infini, on obtient

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_s) = X_s \ \ \mathbb{P} - p.s..$$

(On a utilisé le fait que l'application $U \to \mathbb{E}(U|\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire continu de L^1 dans L^1 donc $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(U|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(V|\mathcal{G})|) \leq \mathbb{E}(|U - V|))$.
ii) $\Rightarrow$ iii) : Posons pour $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$A_t(a) = \int_{\{|X_t| \geq a\}} |X_t| \, d\mathbb{P}.$$

On a

$$A_t(a) \leq \int_{\{|X_t| \geq a\}} \mathbb{E}(|X_\infty| \ |\mathcal{F}_t) \, d\mathbb{P} = \int_{\{|X_t| \geq a\}} |X_\infty| \, d\mathbb{P}.$$

$|X_\infty|$ étant uniformément intégrable, elle est aussi équicontinue c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) \leq \eta$ alors

$$\int_A |X_\infty| \, d\mathbb{P} \leq \epsilon.$$

Or, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|X_t| \geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(|X_t|)$$

$$\leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(|X_\infty|) \to 0, a \to +\infty.$$

On en déduit que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} A_t(a) \to 0, a \to +\infty.$$

iii) $\Rightarrow$ i) : $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est uniformément intégrable, donc elle est bornée dans L^1. Donc, par le théorème de convergence presque sûre, $X_t \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. lorsque t tend vers $+\infty$. En utilisant l'uniforme intégrabilité, on obtient que X_t converge, dans L^1, vers X_∞ lorsque t tend vers $+\infty$.

b) Si $p > 1$ et si

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathbb{E}(|X_t|^p) < +\infty,$$

alors

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |X_t| \in L^p.$$

(Voir le c) du théorème sur les inégalités de Doob qui s'étend au cas où on remplace l'intervalle $[0, t]$ par $\mathbb{R}^+$).
$(|X_t|^p)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est uniformément intégrable car elle est majorée par $(\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |X_t|)^p \in$

L^1. On en déduit que $X_\infty \in L^p$ car $|X_\infty|^p \leq (\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|X_t|)^p \in L^1$ et que X_t converge vers X_∞ dans L^p lorsque $t \to +\infty$ par le résultat suivant :
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. de puissance p-ième intégrables, les deux assertions suivantes sont équivalentes :
i) X_n converge en probabilité vers X lorsque n tend vers l'infini et $(|X_n|^p)_n$ est uniformément intégrable.
ii) $X \in L^p$ et X_n converge dans L^p vers X lorsque n tend vers l'infini. □

Notation : Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une martingale continue à droite par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ uniformément intégrable et soit $X_\infty \in L^1$ la limite (dans L^1) de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Soit S un temps d'arrêt. On définit :

$$X_S(\omega) = \begin{cases} X_{S(\omega)}(\omega) & \text{si } S(\omega) < +\infty. \\ X_\infty(\omega) & \text{si } S(\omega) = +\infty. \end{cases}$$

Nous énonçons une version plus générale du théorème d'arrêt. La preuve est omise.

Théorème 3.4.3. [Théorème d'arrêt modifié] *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une martingale continue à droite par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ uniformément intégrable.*
a). Pour tout temps d'arrêt S, la v.a. X_S est intégrable (et $\mathcal{F}_S$-mesurable).
b). Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, alors

$$X_S = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S),\ \mathbb{P}-p.s..$$

Remarque :
L'hypothèse d'uniforme intégrabilité est fondamentale : la martingale continue $(M_t^{(\alpha)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ définie pour $\alpha > 0$ par

$$M_t^{(\alpha)} = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2})$$

ne vérifie pas la conclusion du théorème d'arrêt. En effet, comme $M_t^{(\alpha)} \to 0, \mathbb{P}-p.s.$ quand t tend vers $+\infty$, le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t \geq 0; M_t^{(\alpha)} \leq 1/2\}$$

est fini $\mathbb{P}$-p.s. et $\mathbb{E}(M_T^{(\alpha)}) = \frac{1}{2}$. Et, trivialement,

$$\mathbb{E}(M_0^{(\alpha)}) = 1.$$

En fait, $(M_t^{(\alpha)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est bornée dans L^1 mais elle n'est pas équicontinue.

EXERCICES

Exercice 3.1 : 1) Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel standard.
a) Montrer que $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale $\mathbb{P}$-p.s. continue relativement à la filtration naturelle complétée $(\bar{\mathcal{F}}_t^o)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $(\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale $\mathbb{P}$-p.s. continue relativement à la filtration naturelle complétée $(\bar{\mathcal{F}}_t^o)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

2) Soit $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus de Poisson standard de paramètre $\lambda > 0$.
a) Montrer que $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale continue à droite relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^o)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $(\exp(\alpha N_t - (e^\alpha - 1)\lambda t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale continue à droite relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^o)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

3) Soit $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus de Poisson standard de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$S_t = \sup_{s\in[0,t]} N_s.$$

Montrer que pour tout $a > 1$, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(S_t \geq a\lambda t) \leq \exp(-\lambda t(1 - a + a\ln\ a)).$$

Exercice 3.2 : Mesures Gaussiennes et mouvement Brownien réel.
Un espace Gaussien réel est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ formé de (classes d'équivalence de) v.a.r. Gaussiennes centrées.
Une mesure Gaussienne m sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ d'intensité la mesure de Lebesgue l sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ est une application linéaire isométrique de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ sur un sous-espace Gaussien G d'un espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On a donc en particulier :

$$< m(f), m(g) >_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = < f, g >_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Propriété : Toute (classe déquivalence de) v.a.r. X sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ limite dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$d'une suite de (classes d'équivalence de) v.a.r. Gaussiennes centrées est elle-même gaussienne, centrée.

1) Montrer que si m est une mesure Gaussienne (sur $L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$) d'intensité l et si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, B_t désigne un représentant de la classe d'équivalence $m(\mathbf{1}_{[0,t]})$, le processus stochastique $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel.

2) Soit m une mesure Gaussienne d'intensité l et le mouvement Brownien réel $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ qui lui a été associé en 1).
On note $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ boréliennes

et telles que pour tout $t > 0$, on ait : $f.\mathbf{1}_{[0,t]} \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$. Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ fixée. On lui associe un processus stochastique réel $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tel que, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t soit un représentant de la classe d'équivalence $m(f.\mathbf{1}_{[0,t]})$.
a) Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus Gaussien centré. Montrer que c'est un P.A.I..
b) Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à la filtration naturelle complétée $(\bar{\mathcal{F}}^o_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

3) Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel, basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer qu'il existe une mesure Gaussienne m unique sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ d'intensité l telle que l'on ait :

$$m(f) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \forall f \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

et telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, B_t soit un représentant de la classe d'équivalence $m(\mathbf{1}_{[0,t]})$.

4) Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel dont toutes les trajectoires sont continues. Soit m la mesure Gaussienne associée (cf 3)). Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ fixée.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus stochastique réel tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, la v.a.r. X_t soit un représentant de la classe d'équivalence $m(f.\mathbf{1}_{[0,t]})$. D'après 2), $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une $(\bar{\mathcal{F}}^o_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-martingale.
Montrer qu'il existe une modification $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ dont toutes les trajectoires sont continues.

Définition : Une telle modification continue $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est notée $\int_0^t f(s)\,dB_s$ *l'intégrale stochastique de Wiener* de la fonction déterministe $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), l)$ par rapport au mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Chapitre 4

Propriété de Markov forte des P.A.I.S. et applications

4.1 Propriété forte de Markov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.

Théorème 4.1.1. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-P.A.I.S. d-dimensionnel continu à droite, alors, pour tout temps d'arrêt T, sur l'ensemble $\{T < +\infty\}$, le processus stochastique $(X_{T+t} - X_T)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ et est équivalent à $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on note ϕ_t la fonction caractéristique de la v.a. X_t, c'est à dire

$$\phi_t(u) = \mathbb{E}(e^{i<u,X_t>}),\ \ u \in \mathbb{R}^d.$$

Posons pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $u \in \mathbb{R}^d$,

$$M_t^{(u)} = \frac{e^{i<u,X_t>}}{\phi_t(u)}.$$

Il est facile de montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ fixé, $(M_t^{(u)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-martingale à valeurs complexes. On utilise ce resultat dans la preuve du théorème 4.1.1.

Démonstration. a). Supposons T borné. Il suffit de montrer que pour tout $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$, pour tout $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ (on pose $t_0 = 0$),

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{T+t_k} - X_{T+t_{k-1}} >\Big)\Big|\mathcal{F}_T\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} >\Big)\Big].$$

On a

$$\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{T+t_k} - X_{T+t_{k-1}} > \Big) = \prod_{k=1}^{n} \frac{M_{T+t_k}^{(u_k)}\phi_{T+t_k}(u_k)}{M_{T+t_{k-1}}^{(u_k)}\phi_{T+t_{k-1}}(u_k)}$$

Or

$$\frac{\phi_{T+t_k}(u_k)}{\phi_{T+t_{k-1}}(u_k)} = \phi_{t_k-t_{k-1}}(u_k)$$

et $\mathbb{P}-$p.s.

$$\mathbb{E}\Big(\frac{M_{T+t_k}^{(u_k)}}{M_{T+t_{k-1}}^{(u_k)}}\Big|\mathcal{F}_{T+t_{k-1}}\Big) = 1.$$

On pose $U = \prod_{k=1}^{n} U_k$ avec $U_k = \frac{M_{T+t_k}^{(u_k)}}{M_{T+t_{k-1}}^{(u_k)}}$. En conditionnant successivement par rapport à $\mathcal{F}_{T+t_{n-1}}, \mathcal{F}_{T+t_{n-2}}, \ldots, \mathcal{F}_{T+t_1}$, on montre que

$$\mathbb{E}(U|\mathcal{F}_T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U|\mathcal{F}_{T+t_{n-1}})|\mathcal{F}_T) = \ldots = 1.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{T+t_k} - X_{T+t_{k-1}} > \Big)\Big|\mathcal{F}_T\Big] \\
= \ & \prod_{k=1}^{n} \phi_{t_k-t_{k-1}}(u_k) \\
= \ & \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} > \Big)\Big],
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un P.A.I.S.

b). Soit T un temps d'arrêt quelconque. On pose $T_m = T \wedge m$. Pour tout $m \geq 1$, T_m est un temps d'arrêt borné. On veut montrer que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{T+t_k} - X_{T+t_{k-1}} > \Big)\Big|\mathcal{F}_T\Big]\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}} \\
= \ & \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} > \Big)\Big]\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}
\end{aligned}$$

Ceci est équivalent à montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_T$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{A\cap\{T<+\infty\}}\exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{T+t_k} - X_{T+t_{k-1}} > \Big)\Big] \\
= \ & \mathbb{P}(A\cap\{T<+\infty\})\prod_{k=1}^{n} \phi_{t_k-t_{k-1}}(u_k)
\end{aligned}$$

Posons $A_m = A \cap \{T \leq m\}$. Puisque $A_m \in \mathcal{F}_{T_m}$ (car $A_m = A \cap \{T \leq T_m\}$), d'après le a)., on a

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{A_m} \exp\Big(i \sum_{k=1}^{n} < u_k, X_{T_m+t_k} - X_{T_m+t_{k-1}} > \Big)\Big] = \mathbb{P}(A_m) \prod_{k=1}^{n} \phi_{t_k - t_{k-1}}(u_k)$$

On conclut en appliquant le théorème de convergence dominée. □

4.2 Application au mouvement Brownien réel standard

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel standard. On s'intéresse à la loi de

$$S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s.$$

Théorème 4.2.1 (Principe de symétrie)**.** *Pour tout $t > 0$, pour tout $a > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(S_t \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a).$$

Remarques :
1). Pour tout $t > 0$, la v.a. S_t a donc la même loi que $|B_t|$. Par contre, $(S_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ne sont pas équivalents. Pourquoi ?
2). Pour tout $a > 0$, notons $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t \geq a\}$ le premier instant où la trajectoire Brownienne atteint le niveau a. Puisque les événements $\{T_a \leq t\}$ et $\{S_t \geq a\}$ coïncident, le principe de symétrie nous permet de calculer la fonction de répartition F_a de la v.a. T_a :

$$F_a(t) = \mathbb{P}(T_a \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a).$$

On en déduit que la densité de la v.a. T_a est donnée par

$$f_a(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp(-a^2/(2x))\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

On peut aussi montrer que $T_a < +\infty$ $\mathbb{P}-$p.s. et $\mathbb{E}(T_a) = +\infty$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où toutes les trajectoires de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont continues. On a

$$\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \geq a) + \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t < a).$$

Soit $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t \geq a\}$. La v.a. T_a est finie $\mathbb{P}$-p.s.. Sur l'événement $\{T_a < +\infty\}$, $B_{T_a} = a$, donc

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \geq a) = \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \geq a) = \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t - B_{T_a} \geq 0).$$

Or, d'après la propriété de Markov forte, $(B_{T_a+t} - B_{T_a})_{t\in\mathbb{R}^+}$, définie $\mathbb{P}-$p.s., est indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$ et est un mouvement Brownien réel. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, la v.a.r. $B_{T_a+t} - B_{T_a}$ a une loi symétrique, donc

$$\mathbb{P}(T_a \leq t, B_t - B_{T_a} \geq 0) = \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t - B_{T_a} \leq 0) = \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq a).$$

On conclut en remarquant que $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \geq a) = \mathbb{P}(B_t \geq a)$. $\square$

EXERCICES

Exercice 4.1 : Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel à trajectoires continues défini sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.
Soit α un réel non nul. On pose pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $X_t=\alpha t+B_t$ et $Y_t=-\alpha t+B_t$.
Soit a un réel non nul. On pose

$$T_a=\inf\{t\geq 0; B_t\geq a\} \quad (=+\infty \text{ si } \{.\}=\emptyset)$$

et

$$U_a=\inf\{t\geq 0; X_t\geq a\} \quad (=+\infty \text{ si } \{.\}=\emptyset).$$

On veut déterminer la loi de U_a à partir de celle de T_a. Nous admettrons que le temps d'arrêt T_a suit une loi de densité f_a où

$$f_a(x)=\frac{|a|}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp(-\frac{a^2}{2x})\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

et que la transformée de Laplace de la loi de T_a est donnée par

$$\mathbb{E}(e^{-\alpha T_a})=\exp(-|a|\sqrt{2\alpha}),\ \forall\alpha\in\,]0,+\infty[.$$

On note $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$ la filtration naturelle de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $\mathcal{F}_\infty^0=\sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+}\mathcal{F}_t^0)$.

On pose pour tout $t\in\mathbb{R}^+$,

$$M_t^{(\alpha)}=\exp\Big(\alpha B_t-\frac{\alpha^2 t}{2}\Big).$$

On pose également pour $t\in\,]0,+\infty[$ et $A\in\mathcal{F}_t^0$,

$$\mathbb{P}_t^{(\alpha)}(A)=\mathbb{E}(\mathbf{1}_A\ M_t^{(\alpha)}).$$

1) a)- Montrer que pour tout $t\in\,]0,+\infty[$, $\mathbb{P}_t^{(\alpha)}$ est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F}_t^0)$.
b)- Montrer que si $0\leq s<t$ et si $A\in\mathcal{F}_s^0$, alors $\mathbb{P}_t^{(\alpha)}(A)=\mathbb{P}_s^{(\alpha)}(A)$.
c)- En déduire qu'il existe une probabilité et une seule qu'on notera $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ sur $(\Omega,\mathcal{F}_\infty^0)$ telle que l'on ait : $\forall t\in\,]0,+\infty[$ et $\forall A\in\mathcal{F}_t^0$,

$$\mathbb{P}^{(\alpha)}(A)=\mathbb{P}_t^{(\alpha)}(A).$$

2) a)- Montrer que le processus stochastique $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, basé sur $(\Omega,\mathcal{F}_\infty^0,\mathbb{P}^{(\alpha)})$, est un mouvement Brownien réel à trajectoires continues. (Indication : Faire un calcul de loi. Connaissant la loi de la v.a. $(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\ldots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ sous $\mathbb{P}$, déterminer celle de $(Y_{t_1},Y_{t_2}-Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n}-Y_{t_{n-1}})$ sous $\mathbb{P}^{(\alpha)}$).
b)- En déduire que le processus stochastique $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, basé sur $(\Omega,\mathcal{F}_\infty^0,\mathbb{P}^{(\alpha)})$, est équivalent au processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, basé sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.
3) a)- Montrer que pour tout $t\in\,]0,+\infty[$,

$$\mathbb{P}^{(\alpha)}(\{T_a\leq t\})=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}M_t^{(\alpha)}).$$

b)- En déduire, en posant $T_a(t) = T_a \wedge t$ et en utilisant le théorème d'arrêt (pour les temps d'arrêt bornés), que

$$\mathbb{P}^{(\alpha)}(\{T_a \leq t\}) = \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} \exp(\alpha a - \frac{\alpha^2}{2} T_a)\Big).$$

c)- Déduire du b)- la valeur de $\mathbb{P}^{(\alpha)}(\{T_a < +\infty\})$.
4) a)- On suppose que α *et* a *sont de même signe*. Montrer que $\mathbb{P}^{(\alpha)}(\{T_a < +\infty\}) = 1$ et déterminer la loi de T_a sous $\mathbb{P}^{(\alpha)}$.
(Indication : Utiliser 3) b)- et la densité de T_a sous $\mathbb{P}$).
b)- On suppose que α *et* a *sont de signes opposés*. Déterminer $\mathbb{P}^{(\alpha)}(\{T_a < +\infty\})$ ainsi que la loi de T_a sous $\mathbb{P}^{(\alpha)}$.
5) Déduire des résultats des questions 4) a)- et 4) b)- la loi de U_a sous $\mathbb{P}$. (Indication : utiliser 2) b)-).

Exercice 4.2 : Soit $(Z_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi sur un espace de probabilité $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.
On suppose que $\mathbb{P}(\{Z_1 = -1\}) = \mathbb{P}(\{Z_1 = 1\}) = \frac{1}{2}$. $(S_n)_{n\geq 0}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$Y_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}.$$

($[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}^+$).
Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel à trajectoires continues défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
On veut construire une suite $(\overline{Y_t^{(n)}})_{t\in\mathbb{R}^+}$ de processus stochastiques sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que l'on ait les deux propriétés suivantes :
i) $\forall n \geq 1$, $(\overline{Y_t^{(n)}})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est équivalent à $(Y_t^{(n)})_{t\in\mathbb{R}^+}$.
ii) $\forall p \geq 1$ entier, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{0\leq t\leq p} |\overline{Y_t^{(n_k)}} - B_t| = 0 \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

On admettra que la variable aléatoire

$$T = \inf\{t \geq 0; |B_t| \geq 1\} \quad (= +\infty \;\text{ si }\; \{.\} = \emptyset)$$

est intégrable, d' intégrale égale à 1 et que la variable aléatoire, définie $\mathbb{P}$-p.s., B_T est telle que

$$\mathbb{P}(\{B_T = -1\}) = \mathbb{P}(\{B_T = +1\}) = \frac{1}{2}.$$

On note $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$ la filtration naturelle de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_t^{(n)} = \sqrt{n} B_{\frac{t}{n}}.$$

On définit le temps d'arrêt (relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$)

$$T_1^{(n)} = \inf\{t \geq 0; |B_t^{(n)}| \geq 1\} \quad (= +\infty \ \text{ si } \ \{.\} = \emptyset).$$

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On définit également

$$T_k^{(n)} = \inf\{t > T_{k-1}^{(n)};\ |B_t^{(n)} - B_{T_{k-1}^{(n)}}^{(n)}| \geq 1\}$$

$(= +\infty$ si $\{.\} = \emptyset$ ou si $T_{k-1}^{(n)} = +\infty)$. On pose $T_0^{(n)} \equiv 0$.
On admettra que, pour tout $k \geq 2$, $T_k^{(n)}$ est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
1) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(B_t^{(n)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien réel à trajectoires continues.
2) a)- Montrer que la suite $(T_k^{(n)} - T_{k-1}^{(n)})_{k\geq 1}$ est formée de variables aléatoires indépendantes, de même loi intégrable et d'intégrale égale à 1.
b)- Montrer que la suite de variables aléatoires réelles, définies $\mathbb{P}$-p.s., $(B_{T_k^{(n)}}^{(n)} - B_{T_{k-1}^{(n)}}^{(n)})_{k\geq 1}$ est formée de variables aléatoires indépendantes, de même loi. Quelle est cette loi ?
3) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{Y_t^{(n)}} = B_{\frac{T_{[nt]}^{(n)}}{n}}$.
a)- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le processus stochastique $(\overline{Y_t^{(n)}})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est équivalent à $(Y_t^{(n)})_{t\in\mathbb{R}^+}$.
b)- Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{T_{[nt]}^{(n)}}{[nt]} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

c)- En admettant qu'on puisse déduire de 3) b)- la propriété suivante : $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{0\leq t\leq p} \left| \frac{T_{[nt]}^{(n)}}{n} - t \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

lorsque $n \to +\infty$, montrer qu'il existe, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{0\leq t\leq p} \left| \overline{Y_t^{(n_k)}} - B_t \right| = 0 \ \mathbb{P}-\text{p.s.}.$$

Chapitre 5

Processus à variation finie et intégrale de Stieltjes

5.1 Fonctions à variation finie et intégrale de Stieltjes

5.1.1 Fonctions à variation finie.

Soit A une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue à droite avec limite à gauche. On note $A_t \equiv A(t)$. Soit $t > 0$. Une partition Δ_t de l'intervalle $[0, t]$ est une suite de points $(t_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ tels que $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$. Pour tout $t > 0$, on définit

$$V(A)_t = \sup_{\Delta_t} \sum_{t_i \in \Delta_t} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|$$

La fonction A est à variation finie si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $V(A)_t$ est finie. La fonction $t \to V(A)_t$ s'appelle *la variation (totale) de A*.

Propriétés :
a)- La fonction $t \to V(A)_t$ est croissante.
b)- La fonction $t \to V(A)_t$ est continue à droite et admet des limites à gauche. De plus,

$$V(A)_t = V(A)_{t-} + |\Delta A_t|$$

où $\Delta A_t = A_t - A_{t-}$ est *le saut de A en t*.
c)- La fonction A peut toujours se réécrire comme

$$A_t = A_t^c + \sum_{s \leq t} \Delta A_s$$

où A_t^c est la partie continue de A_t. Alors,

$$V(A)_t = V(A^c)_t + \sum_{s \leq t} |\Delta A_s|.$$

d)- .$(\sum_{s\leq t}\Delta A_s)_{t\geq 0}$ est une fonction à variation finie et

$$V(\sum_{s\leq t}\Delta A_s)=\sum_{s\leq t}|\Delta A_s|.$$

. Si A et B sont deux fonctions à variation finie, alors $A+B$ est à variation finie et

$$V(A+B)\leq V(A)+V(B).$$

Exemples : Si A est de classe $\mathcal{C}^1$ ou monotone, alors A est à variation finie.

Remarque :
Une fonction A est à variation finie si et seulement si elle est à variation localement bornée. (Une fonction $f=(f(t))_{t\geq 0}$ est localement bornée si pour tout $t<\infty$, il existe K_t tel que $|f(s)|\leq K_t$, pour tout $s\leq t$.)

Proposition 5.1.1. *Toute fonction à variation finie est différence de deux fonctions croissantes, positives.*

Démonstration. Soit $A^+=\frac{1}{2}(V(A)+A-A_0)$ et $A^-=\frac{1}{2}(V(A)-A+A_0)$. Clairement, $A^++A^-=V(A)$ et $A^+-A^-=A-A_0$. Montrons que A^+ est croissante : soit $t'>t$,

$$V(A)_{t'}=V(A)_t+V(A-A_t)_{[t,t']}.$$

Comme $V(A-A_t)_{[t,t']}\geq |A_{t'}-A_t|$,

$$V(A)_{t'}-V(A)_t+A_{t'}-A_t=V(A-A_t)_{[t,t']}+(A_{t'}-A_t)\geq 0.$$

Donc, A^+ est une fonction croissante, nulle en 0 (Idem pour A^-). □

5.1.2 Fonctions à variation finie et mesures sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

On peut associer à chaque fonction A^+ et A^- continue à droite et croissante (construites dans le paragraphe précédent) une mesure positive $\sigma-$finie sur $(\mathbb{R}^{+,*},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{+,*}))$ notée respectivement μ_{A^+} et μ_{A^-} telles que pour tout $t>0$,

$$\mu_{A^+}(]0,t])=A_t^+$$

et

$$\mu_{A^-}(]0,t])=A_t^-.$$

Donc, on peut associer à toute fonction à variation finie A une mesure μ_A $\sigma-$finie sur $(\mathbb{R}^{+,*},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{+,*}))$ en posant

$$\mu_A=\mu_{A^+}-\mu_{A^-}.$$

En particulier, pour tout $t>0$,

$$\mu_A(]0,t])=A_t-A_0.$$

Pour toute fonction borélienne f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ localement bornée, on peut définir l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à A :

$$\int_0^t f(s)\,dA_s \equiv \int_0^t f(s)\,\mu_A(ds).$$

Remarquons que

$$\left|\int_0^t f(s)\,\mu_A(ds)\right| = \left|\int_0^t f(s)\,\mu_{A^+}(ds) - \int_0^t f(s)\,\mu_{A^-}(ds)\right|$$

$$\leq \int_0^t |f(s)|\,(\mu_{A^+} + \mu_{A^-})(ds) \leq \sup_{[0,t]} |f(s)|\; V(A)_t < +\infty.$$

De plus,

$$\mu_A(]0,t[) = A_{t-} - A_0$$

et

$$\mu_A(\{t\}) = \Delta A_t.$$

Si f est une fonction bornée sur l'intervalle $[0,t]$, alors $V(\int_{]0,s]} f(u)\,dA_u)_{s\leq t}$ est finie et

$$V(\int_{]0,t]} f(u)\,dA_u) = \int_{]0,t]} |f(u)|\,dV(A_u).$$

5.1.3 Formule d'intégration par parties.

Théorème 5.1.1. *Soit A et B deux fonctions à variation finie. Alors, pour tout $t > 0$,*

$$A_tB_t = A_0B_0 + \int_0^t A_{s-}\,dB_s + \int_0^t B_s\,dA_s$$

et

$$A_tB_t = A_0B_0 + \int_0^t A_{s-}\,dB_s + \int_0^t B_{s-}\,dA_s + \sum_{s\leq t} \Delta A_s \Delta B_s.$$

Démonstration. La deuxième égalité s'obtient à partir de la première en remarquant que $B_s = B_{s-} + \Delta B_s$ et que $\mu_A(\{s\}) = \Delta A_s$.
Soit μ_A et μ_B les mesures associées à A et B.
a) Par définition de la mesure produit,

$$\begin{aligned} \mu_A \otimes \mu_B(]0,t]\times]0,t]) &= \mu_A(]0,t])\mu_B(]0,t]) \\ &= (A_t - A_0)(B_t - B_0) \end{aligned}$$

b) De plus,

$$\begin{aligned}
\mu_A \otimes \mu_B(]0,t]\times]0,t]) &= \int_{]0,t]\times]0,t]} \mu_A(dx)\,\mu_B(dy) \\
&= \int_{0<x<y,0<y\leq t} \mu_A(dx)\,\mu_B(dy) + \int_{0<y\leq x,0<x\leq t} \mu_A(dx)\,\mu_B(dy) \\
&= \int_{]0,t]} \mu_A(]0,y[)\,\mu_B(dy) + \int_{]0,t]} \mu_B(]0,x])\,\mu_A(dx) \\
&= \int_{]0,t]} (A_{s-}-A_0)\,dB_s + \int_{]0,t]} (B_s - B_0)\,dA_s \\
&= \int_{]0,t]} A_{s-}\,dB_s + \int_{]0,t]} B_s\,dA_s - A_0(B_t-B_0) - B_0(A_t-A_0) \\
&= A_tB_t - A_0B_t - B_0A_t + A_0B_0, \text{ d'après le a),}
\end{aligned}$$

d'où le résultat après les simplifications. □

On déduit facilement du théorème le corollaire suivant :

Corollaire 5.1.1. *Soit A une fonction à variation finie telle que $A_0 = 0$. Alors,*

$$A_t^2 = 2\int_0^t A_{s-}\,dA_s + \sum_{s\leq t}(\Delta A_s)^2.$$

5.1.4 Formule de changement de variable.

Théorème 5.1.2. *Soit A une fonction à variation finie et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, $F(A)$ est une fonction à variation finie et, pour tout $t > 0$,*

$$F(A_t) = F(A_0) + \int_0^t F'(A_{s-})\,dA_s + \sum_{s\leq t}\Big(F(A_s) - F(A_{s-}) - \Delta A_s F'(A_{s-})\Big).$$

Remarque :
Si A est continue, alors

$$F(A_t) = F(A_0) + \int_0^t F'(A_s)\,dA_s.$$

Par exemple, si $F(x) = e^x$,

$$\exp(A_t) = \exp(A_0) + \int_0^t \exp(A_s)\,dA_s.$$

La preuve du théorème se fait en deux étapes : on montre tout d'abord que la formule est vraie pour $F(x) = x$ (évident) puis par extension à tout polynôme en appliquant la formule d'intégration par parties. On passe ensuite à F de classe $\mathcal{C}^1$ en approchant uniformément F et F' par une suite de polynômes.

Proposition 5.1.2. *Soit A une fonction à variation finie et soit Y définie par*
$$Y_t = Y_0 \prod_{s\leq t}(1+\Delta A_s)\exp(A_t^c - A_0^c).$$
Alors, Y est la solution unique (en tant que solution à variation finie) de l'équation différentielle
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Y_{s-}\, dA_s.$$
Démonstration. a)- Remarquons que si X est une fonction à variation finie, alors $t \to \exp(X_t)$ est à variation finie :
soit $0 = t_0 < t_1 < \dots t_n = t$,
$$\sum_{i=0}^{n-1} |\exp(X_{t_{i+1}}) - \exp(X_{t_i})| \leq \sup_{s\leq t}(\exp(X_s)) \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|$$
$$\Rightarrow \quad V(\exp(X))_t \leq \exp(V(X)_t)\ V(X)_t.$$
b)- Posons
$$U_t = Y_0 \prod_{s\leq t}(1+\Delta A_s)$$
et
$$V_t = \exp(A_t^c - A_0^c).$$
U et V sont des fonctions à variation finie car leur log est à variation finie. La formule d'intégration par parties donne :
$$Y_t = U_t V_t = Y_0 + \int_0^t U_{s-}\, dV_s + \int_0^t V_s\, dU_s.$$
Or, $dV_s = V_s dA_s^c$ et $dU_s = Y_0 \prod_{s<t}(1+\Delta A_s)\Delta A_t = U_{t-} d(\sum_{u\leq t} \Delta A_u)$, donc
$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t U_{s-} V_s\, dA_s^c + \int_0^t V_{s-} U_{s-}\, d(\sum_{u\leq s} \Delta A_u) \\ &= Y_0 + \int_0^t Y_{s-}\, dA_s \end{aligned}$$
en remarquant que $A_s = A_s^c + \sum_{u\leq s} \Delta A_u$.
c)- Il reste à montrer l'unicité. Supposons que l'on ait deux solutions à variation finie de l'équation différentielle. Notons Z la différence de ces deux solutions. Alors, Z est encore solution de l'équation différentielle et
$$|Z_t| \leq M_t\ V(A)_t$$
où $M_t = \sup_{u\leq t} |Z_u|$. En utilisant de façon itérative la formule d'intégration par parties, on obtient que
$$|Z_t| \leq \int_0^t M_s\ V(A)_s\, dV(A)_s \leq M_t\ \frac{V(A)_t^2}{2} \leq \dots \leq M_t\ \frac{V(A)_t^n}{n!} \to 0$$
lorsque $n \to +\infty$. □

5.1.5 Changement de temps.

Soit A une fonction croissante donc en particulier à variation finie telle que $A_0 = 0$. On définit pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\tau_t = \begin{cases} \inf\{s : A_s > t\} \text{ si } \{.\ \} \neq \emptyset \\ +\infty \quad \text{si } \{.\ \} = \emptyset. \end{cases}$$

La fonction $t \to \tau_t$ est souvent appelée "pseudo-inverse" de la fonction A.

Proposition 5.1.3. *Soit f une fonction borélienne positive définie sur $[0, +\infty[$ et bornée sur $[0, t]$. Alors,*

$$\int_{]0,t]} f(s)\, dA_s = \int_0^{A_t} f(\tau_s)\, ds.$$

Démonstration. On prouve la proposition pour $f(s) = \mathbf{1}_{]0,u]}(s)$ où $u \leq t$. La généralisation à toute fonction borélienne s'obtient de manière classique.
. $f \circ \tau_s = \mathbf{1}_{]0,u]}(\tau_s) = \mathbf{1}_{\{\tau_s \leq u\}} = \mathbf{1}_{\{A_u \geq s\}}$ Lebesgue p.s..
En utilisant le fait que A est croissante, on obtient que

$$\int_0^{A_t} \mathbf{1}_{]0,u]}(\tau_s)\, ds = \int_0^{A_t} \mathbf{1}_{\{A_u \geq s\}}\, ds = \int_0^{A_u} ds = A_u.$$

. $\int_{]0,t]} f(s)\, dA_s = \int_{]0,t]} \mathbf{1}_{]0,u]}(s)\, dA_s = \int_{]0,u]} dA_s = A_u - A_0 = A_u.$ □

5.2 Processus à variation finie.

Soit une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ supposée complète pour $\mathbb{P}$ et $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Le processus A est *à variation finie* si $\mathbb{P}$-presque toutes les trajectoires $t \to A_t(\omega)$ sont à variation finie.

Remarque :
Notons que $V(A)$, A^+ et A^- sont des processus adaptés à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Soit A un processus à variation finie. Pour $t \geq 0$ et pour $\mathbb{P}-$presque tout $\omega \in \Omega$, on peut définir (si elle existe) l'intégrale stochastique $\Big(\int_0^t X_s\, dA_s\Big)(\omega)$ comme l'intégrale de Stieltjes

$$\int_0^t X_s(\omega)\, dA_s(\omega).$$

La proposition suivante donne des conditions suffisantes afin que cette intégrale soit bien définie.

Proposition 5.2.1. *(admise) Soit X un processus progressivement mesurable, borné sur tout intervalle $[0,t]$ et soit A un processus à variation finie. Alors, $\left(\int_0^t X_s\, dA_s\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus à variation finie et adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

(Sur l'ensemble négligeable où A n'est pas à variation finie, l'intégrale est posée égale à 0).

Exemple : Soit $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ le processus de Poisson, d'intensité λ. On a dèjà vu que $(N_t - \lambda t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Soit $\alpha > -1$. Considérons la martingale relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$

$$L_t^\alpha = \exp[\ln(1+\alpha)N_t - \lambda\alpha t].$$

Remarquons que le processus de Poisson peut s'écrire

$$N_t = \sum_{s\le t} \Delta N_s$$

avec $\Delta N_s = \mathbf{1}_{\{\Delta N_s \neq 0\}}$. Nous pouvons réécrire $(L_t^\alpha)_{t\in\mathbb{R}^+}$ comme

$$\begin{aligned} L_t^\alpha &= \exp(-\lambda\alpha t)\prod_{s\le t}(1+\alpha)^{\Delta N_s} \\ &= \exp(-\lambda\alpha t)\prod_{s\le t}(1+\Delta(\alpha N_s - \alpha\lambda s)) \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.2, L_t^α est l'unique solution en tant que processus à variation finie de l'équation différentielle stochastique linéaire suivante

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Y_{s-} d(\alpha N_s - \alpha\lambda s).$$

Autrement dit,

$$\int_0^t L_{s-}^\alpha d(\alpha N_s - \alpha\lambda s) = L_t^\alpha - 1.$$

Comme $(L_t^\alpha)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$, on en déduit que $\left(\int_0^t L_{s-}^\alpha d(\alpha N_s - \alpha\lambda s)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
La question naturelle qui se pose alors est la suivante : soit M une martingale à variation finie, quand peut-on dire que $\left(\int_0^t X_s\, dM_s\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale ? Ce n'est pas toujours vrai. Prenons le processus de Poisson standard de paramètre $\lambda = 1$. Le processus

$$\left(\int_0^t (N_s - s)\, d(N_s - s)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$$

est-il une martingale ?
1)- D'après la formule d'intégration par parties,

$$(N_t - t)^2 = \int_0^t (N_s - s)_- \, d(N_s - s) + \int_0^t (N_s - s) \, d(N_s - s)$$

Donc,

$$\int_0^t (N_s - s) \, d(N_s - s) = (N_t - t)^2 - \int_0^t (N_{s-} - s) \, d(N_s - s)$$

2)- Puisque $N_s = N_{s-} + \Delta N_s$, on a

$$\int_0^t (N_s - s) \, d(N_s - s) = \int_0^t (N_{s-} - s) \, d(N_s - s) + \int_0^t \Delta(N_s - s) \, d(N_s - s)$$

Or $\Delta(N_s - s) = \Delta N_s$, donc

$$\int_0^t \Delta(N_s - s) \, d(N_s - s) = \sum_{s \leq t} (\Delta N_s)^2 = \sum_{s \leq t} (\Delta N_s) = N_t.$$

On a alors la relation

$$\int_0^t (N_s - s) \, d(N_s - s) = \int_0^t (N_{s-} - s) \, d(N_s - s) + N_t.$$

En additionnant les formules obtenues en 1)- et 2)-, on obtient que

$$2 \int_0^t (N_s - s) \, d(N_s - s) = (N_t - t)^2 - t + N_t - t + 2t.$$

On a déjà vu que les processus $((N_t - t)^2 - t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ et $(N_t - t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sont des martingales, donc $\left(\int_0^t (N_s - s) \, d(N_s - s) \right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ n'est pas une martingale. Par contre, si on soustrait les formules obtenues en 1)- et 2)-, on obtient que

$$2 \int_0^t (N_s - s)_- \, d(N_s - s) = (N_t - t)^2 - t - (N_t - t).$$

Donc, $\left(\int_0^t (N_s - s)_- \, d(N_s - s) \right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale comme différence de deux martingales.

Théorème 5.2.1. *Soit H un processus adapté, continu à gauche, borné sur tout intervalle $[0, t]$. Soit M une martingale à variation intégrable sur tout $[0, t]$ (i.e. $\mathbb{E}(V(M)_t) < +\infty$). Alors, $\left(\int_0^t H_s \, dM_s \right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale.*

Démonstration. Soit $H_s = \alpha_u \mathbf{1}_{]u,v]}(s)$ avec $u \leq v$, α_u $\mathcal{F}_u$-mesurable et bornée. Alors,

$$\int_0^t H_s\, dM_s = \alpha_u(M_{v\wedge t} - M_{u\wedge t}) = \alpha_u(M_t^v - M_t^u).$$

(avec la notation des martingales arrêtées).
Soit $s \leq t$.
a)- Cas $u \leq s$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\int_0^t H_{t'}\, dM_{t'}\Big|\mathcal{F}_s\Big) &= \mathbb{E}(\alpha_u(M_t^v - M_t^u)|\mathcal{F}_s) \\
&= \alpha_u(\mathbb{E}(M_t^v|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(M_t^u|\mathcal{F}_s)) \\
&= \alpha_u(M_s^v - M_s^u) \\
&= \int_0^s H_{t'}\, dM_{t'}.
\end{aligned}$$

b)- Cas $s < u$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\int_0^t H_{t'}\, dM_{t'}\Big|\mathcal{F}_s\Big) &= \mathbb{E}(\alpha_u(M_t^v - M_t^u)|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\alpha_u(M_t^v - M_t^u)|\mathcal{F}_u)|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(\alpha_u(M_{v\wedge u} - M_{u\wedge u})|\mathcal{F}_s) = 0 \\
&= \int_0^s \alpha_u \mathbf{1}_{]u,v]}(t')\, dM_{t'}.
\end{aligned}$$

Soit $H_s = \sum_i \alpha_{u_i} \mathbf{1}_{]u_i,u_{i+1}]}(s)$ avec les α_{u_i} $\mathcal{F}_{u_i}$-mesurables et bornées. Pour $s \leq t$, on va approcher H continu à gauche par des H^n du type :

$$H_s^n = \sum_{i=1}^{p(n)} \alpha_{u_i^n}^n \mathbf{1}_{]u_i^n, u_{i+1}^n]}(s).$$

Il suffit alors de montrer les trois points suivants afin d'établir le théorème :
i) pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, quand $n \to +\infty$,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \int_0^t H_u^n\, dM_u) \longrightarrow \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \int_0^t H_u\, dM_u).$$

Remarquons que $dM_u = d\mu_M^+ - d\mu_M^-$, il suffit donc de considérer

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \int_0^t H_u^n\, d\mu_M^+(u)) = \int_{\Omega\times]0,t]} \mathbf{1}_A H_u^n(\omega) \mu_M^+(\omega, du)\mathbb{P}(d\omega).$$

La convergence découle de l'utilisation du théorème de Lebesgue.
ii) $(\int_0^t H_s\, dM_s)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Evident par la proposition 5.2.1 car H est progressivement mesurable (H étant supposé adapté

et continu à gauche).
iii) H étant borné sur tout intervalle $[0,t]$ par une certaine valeur K_t,

$$\mathbb{E}(|\int_0^t H_s\,dM_s|) \leq \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|\,dV(M)_s) \leq K_t\;\mathbb{E}(V(M)_t) < +\infty.$$

□

Théorème 5.2.2. *Une martingale M continue est à variation finie si et seulement si elle est constante.*

Démonstration. On peut supposer que $M_0 = 0$. On fixe $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$S_n = \begin{cases} \inf\{s : V(M)_s \geq n\} & \text{si } \{\ .\ \} \neq \emptyset \text{ pour } s \leq t \\ t \text{ si } \{\ .\ \} = \emptyset. \end{cases}$$

S_n est un temps d'arrêt et la martingale M^{S_n} est à variation bornée. Il suffit donc de montrer le théorème pour une martingale continue M telle que M et sa variation soient bornées par une constante K. Soit $\Delta = \{t_0 = 0, t_1, \ldots, t_p = t\}, t_i < t_{i+1}$ une partition de $[0,t]$, de pas $|\tau| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$. Calculons

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{E}(M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2).$$

Or, pour tout $u \leq v$,

$$\mathbb{E}(M_v^2 - M_u^2) = \mathbb{E}((M_v - M_u)^2).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t^2) &= \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2) \\ &\leq \mathbb{E}\Big[(\sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|) \times \sum_{i=0}^{p-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\Big] \\ &\leq \mathbb{E}\Big[V(M)_t \sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\Big] \\ &\leq K\mathbb{E}\Big[\sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\Big] \to 0 \end{aligned}$$

lorsque $|\tau|$ tend vers 0 (utiliser le théorème de Lebesgue et le fait que M est continue, bornée). Donc, $M \equiv 0$.

□

Nous avons vu que l'intégrale de Stieltjes permet d'intégrer un processus par rapport à un autre processus à variation finie trajectoire par trajectoire. Le théorème précédent indique que ce raisonnement n'est plus valable si on souhaite intégrer par rapport à une martingale continue (non triviale), par exemple par rapport à un mouvement Brownien réel.

Chapitre 6

Martingales locales continues

6.1 Variation quadratique d'une martingale continue bornée.

Le mouvement Brownien étant à variation infinie, on ne peut pas définir une intégrale de Stieltjes qui lui serait associée. On va toutefois voir qu'il est possible de définir une intégrale d'une autre nature, définie dans un sens quadratique. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus à valeurs réelles. Soit $\Delta = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots\}$ une subdivision de $\mathbb{R}^+$ avec seulement un nombre fini de points dans chaque intervalle $[0, t]$. Nous définissons pour tout $t > 0$, la variable aléatoire

$$T_t^\Delta(X) = \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})^2$$

où k est tel que $t_k \leq t < t_{k+1}$.

On rappelle que X admet une *variation quadratique finie* (voir le paragraphe 2.3) s'il existe un processus $< X, X >$ tel que pour tout $t > 0$,

$$T_t^\Delta(X) \xrightarrow{\mathbb{P}} < X, X >_t$$

lorsque le pas de Δ tend vers 0.

Théorème 6.1.1. *Une martingale continue et bornée M admet une variation quadratique finie $< M, M >$. De plus, $< M, M >$ est l'unique processus croissant, continu, nul en 0 tel que $M^2 - < M, M >$ soit une martingale.*

Démonstration. a) - *Unicité :* Conséquence facile du théorème 5.2.2 du chapitre précédent puisque si A et B sont deux tels processus, alors $A - B$ est une martingale à variation finie nulle en 0.

b) - *Existence :*

. Observons que pour tout $t_i < s < t_{i+1}$,

$$\mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) + (M_s - M_{t_i})^2.$$

Donc, on voit facilement que

$$(*) \qquad \mathbb{E}(T_t^{\Delta}(M) - T_s^{\Delta}(M)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s).$$

On en déduit que $(M_t^2 - T_t^{\Delta}(M))_t$ est une martingale continue.

. Fixons $a = t_n > 0$. Nous allons montrer que si (Δ_n) est une suite de subdivisions de $[0, a]$ telle que $|\Delta_n|$ tend vers 0, alors $(T_a^{\Delta_n})_n$ converge dans L^2. Soit Δ et Δ' deux subdivisions de $[0, a]$, notons $\Delta\Delta' = \Delta \cup \Delta'$. D'après (*), le processus $X = T^{\Delta}(M) - T^{\Delta'}(M)$ est une martingale et comme $(X_t^2 - T_t^{\Delta\Delta'}(X))_t$ est une martingale,

$$\mathbb{E}(X_a^2) = \mathbb{E}\Big((T_a^{\Delta}(M) - T_a^{\Delta'}(M))^2\Big) = \mathbb{E}(T_a^{\Delta\Delta'}(X)).$$

Comme $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ et que

$$(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \Big[(T_{t_{i+1}}^{\Delta}(M) - T_{t_i}^{\Delta}(M)) - (T_{t_{i+1}}^{\Delta'}(M) - T_{t_i}^{\Delta'}(M))\Big]^2,$$

on a

$$T_a^{\Delta\Delta'}(X) \leq 2\{T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta}(M)) + T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta'}(M))\}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\mathbb{E}(T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta}(M)))$$

tend vers 0 lorsque $|\Delta| + |\Delta'|$ tend vers 0 : soit $s_k \in \Delta\Delta'$ et $t_l \in \Delta$ tels que $t_l \leq s_k < s_{k+1}$. Nous avons

$$\begin{aligned} T_{s_{k+1}}^{\Delta}(M) - T_{s_k}^{\Delta}(M) &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 \\ &= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}) \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta}(M)) \leq \left(\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}|^2\right) T_a^{\Delta\Delta'}(M).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}\left(T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta}(M))\right) \leq \mathbb{E}\left(\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}|^4\right)^{1/2} \mathbb{E}(T_a^{\Delta\Delta'}(M)^2)^{1/2}.$$

Lorsque $|\Delta| + |\Delta'|$ tend vers 0, le premier facteur tend vers 0 à cause de la continuité de M. Le deuxième facteur est borné par une constante indépendante du choix des subdivisions Δ et Δ' : en effet, calculons

$$\begin{aligned} (T_a^{\Delta}(M))^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\right)^2 \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}(T_a^{\Delta}(M) - T_{t_k}^{\Delta}(M))(T_{t_k}^{\Delta}(M) - T_{t_{k-1}}^{\Delta}(M)) + \sum_{k=1}^{n}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4. \end{aligned}$$

Grace à (*), nous savons que

$$\mathbb{E}(T_a^\Delta(M) - T_{t_k}^\Delta(M)|\mathcal{F}_{t_k}) = \mathbb{E}((M_a - M_{t_k})^2|\mathcal{F}_{t_k})$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_a^\Delta(M))^2) &= 2\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_a - M_{t_k})^2(T_{t_k}^\Delta(M) - T_{t_{k-1}}^\Delta(M))] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left(2\sup_k |M_a - M_{t_k}|^2 + \sup_k |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^2\right) T_a^\Delta(M)\right] \end{aligned}$$

Supposons que M est bornée par une constante C. Alors, par (*), on voit facilement que

$$\mathbb{E}(T_a^\Delta(M))) \leq 4C^2$$

et donc que

$$\mathbb{E}(T_a^\Delta(M))^2) \leq 12C^2\mathbb{E}(T_a^\Delta(M))) \leq 48C^4.$$

En résumé, nous avons montré que la suite $(T_a^{\Delta_n}(M))_n$ a une limite dans L^2 donc en probabilité qu'on note $< M, M >_a$ pour toute suite (Δ_n) de subdivisions de $[0, a]$ telle que $|\Delta_n|$ tend vers 0.

. Dans cette dernière partie, on montre que le processus limite $(< M, M >_t)_t$ a toutes les propritétés énoncées.

- Soit $(\Delta_n)_n$ définie comme au-dessus. L'inégalité de Doob pour la martingale $(T_t^{\Delta_n}(M) - T_t^{\Delta_m}(M))_t$ s'écrit

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq a} |T_t^{\Delta_n}(M) - T_t^{\Delta_m}(M)|^2\right] \leq 4\ \mathbb{E}[(T_a^{\Delta_n}(M) - T_a^{\Delta_m}(M))^2].$$

Il existe donc une sous-suite (Δ_{n_k}) telle que $T_t^{\Delta_{n_k}}(M)$ converge presque sûrement uniformément sur $[0, a]$ vers la limite $< M, M >_t$ qui est donc p.s. continue.

- La suite $(\Delta_n)_n$ peut être choisie telle que Δ_{n+1} soit un raffinement de la subdivision Δ_n et telle que $\bigcup_n \Delta_n$ soit dense dans $[0, a]$. Pour tout $(s, t) \in \bigcup_n \Delta_n$ tels que $s < t$, il existe un entier n_0 tels que s et t appartiennent à toutes les subdivisions Δ_n avec $n \geq n_0$. Or $T_s^{\Delta_n} \leq T_t^{\Delta_n}$ donc

$$< M, M >_s \leq < M, M >_t$$

et donc $< M, M >$ est croissante sur $\bigcup_n \Delta_n$ et donc sur $[0, a]$ car $< M, M >$ est continue.

- Dernier point : on montre que $M^2 - < M, M >$ est une martingale en passant à la limite dans l'équation $(*)$. $\square$

Proposition 6.1.1. *Soit M une martingale continue et bornée, T un temps d'arrêt. On note M^T la martingale arrêtée en T. Alors,*

$$< M^T, M^T > = < M, M >^T .$$

Démonstration. . $< M^T, M^T >$ est l'unique processus croissant, nul en 0, continu telle que

$$(M^2)^T - < M^T, M^T >$$

soit une martingale.
. $(M^2 - < M, M >)^T = (M^2)^T - < M, M >^T$ est une martingale et $< M, M >^T$ est un processus croissant, nul en 0, continu donc $< M^T, M^T > = < M, M >^T$. □

6.2 Martingales locales continues.

Soit M un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles, continu. On dit que M est *une martingale locale continue* si
i) M_0 est intégrable.
ii) Il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n$ telle que $T_n \uparrow +\infty$ p.s. et telle que M^{T_n} soit une martingale uniformément intégrable.

Remarques :

1. La condition ii) peut être remplacée par l'assertion équivalente suivante :
   ii') Il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n$ telle que $T_n \uparrow +\infty$ p.s. et telle que M^{T_n} soit une martingale. Il suffit d'arrêter la martingale en n pour la rendre uniformément intégrable.
2. Une martingale est une martingale locale (prendre $T_n = n$).
3. Une martingale locale arrêtée est une martingale locale : soit S un temps d'arrêt quelconque, M une martingale locale.
   Il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) telle que $T_n \uparrow +\infty$ p.s. et telle que M^{T_n} soit une martingale uniformément intégrable. $(M^S)^{T_n} = M^{T_n\wedge S}$ est encore une martingale uniformément intégrable.
4. La somme de deux martingales locales est une martingale locale.

Exercices :
Démontrer les assertions suivantes :

1. Une martingale locale positive est une surmartingale (Utiliser le lemme de Fatou).
2. Une martingale locale bornée est une martingale.
3. Soit M une martingale locale continue et soit $T_n = \inf\{t : |M_t| \geq n\}$ alors M^{T_n} est une martingale bornée et $T_n \uparrow +\infty$ p.s.
4. Il existe des martingales locales (même uniformément intégrables) qui ne sont pas des martingales (Exercice difficile, voir exercice 7.7).

Exemple de base : Le mouvement Brownien réel (B_t) qui est une martingale donc une martingale locale mais qui n'est pas uniformément intégrable car

$$\sup_t \mathbb{E}(|B_t|) = +\infty.$$

Par contre, il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n$ telle que $T_n \uparrow +\infty$ p.s. et telle que B^{T_n} soit une martingale uniformément intégrable.

Théorème 6.2.1. *Soit M une martingale locale continue. Il existe un unique processus $< M, M >$ croissant, continu, nul en 0 tel que $M^2 - < M, M >$ soit une martingale locale.*
De plus,

$$\sup_{s \leq t} |T_s^{\Delta_n}(M) - < M, M >_s|$$

converge en probabilité vers 0, lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration. . Soit $(T_n)_n$ une suite de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow +\infty$ p.s. et telle que M^{T_n} soit bornée. D'après le théorème 6.1.1, pour tout n, il existe un processus $A^n =< M^{T_n}, M^{T_n} >$ tel que $(M^2)^{T_n} - A^n$ soit une martingale uniformément intégrable.

$$\left((M^2)^{T_{n+1}} - A^{n+1}\right)^{T_n} = (M^2)^{T_n} - (A^{n+1})^{T_n}$$

donc (par unicité),

$$(A^{n+1})^{T_n} = A^n.$$

On peut construire sans ambiguité un processus noté $< M, M >$ croissant, continu, nul en 0 tel que $< M, M >^{T_n} = A^n$. Par cette construction, $M^2 - < M, M >$ est une martingale locale puisque $(M^2 - < M, M >)^{T_n} = (M^2)^{T_n} - A^n$ est une martingale uniformément intégrable.
. Soit t fixé. Soit $\epsilon > 0$ et S un temps d'arrêt tel que M^S est bornée et $\mathbb{P}(S \leq t) \leq \delta$. Sur l'intervalle $[0, S]$, $T^\Delta(M)$ et $< M, M >$ coincide avec $T^\Delta(M^S)$ et $< M^S, M^S >$, donc

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t} |T_s^\Delta(M) - < M, M >_s| > \epsilon) \leq \delta + \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} |T_s^\Delta(M^S) - < M^S, M^S >_s| > \epsilon)$$

et le dernier terme tend vers 0 lorsque le pas de Δ tend vers 0. □

Corollaire 6.2.1. *Soit M, N deux martingales locales continues. Il existe un unique processus $< M, N >$ continu, à variation finie et nul en 0 tel que $MN - < M, N >$ soit une martingale locale continue.*
De plus, pour tout t et pour toute suite de subdivisions $(\Delta_n)_n$ de $[0, t]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$,

$$\sup_{s \leq t} |\widehat{T}_s^{\Delta_n}(M, N) - < M, N >_s|$$

converge en probabilité vers 0, lorsque $n \to +\infty$, où

$$\widehat{T}_s^{\Delta_n}(M, N) = \sum_{t_i \in \Delta_n} (M_{t_{i+1}}^s - M_{t_i}^s)(N_{t_{i+1}}^s - N_{t_i}^s).$$

Démonstration. . Clairement, on a

$$\widehat{T}_t^{\Delta_n}(M,N) = \frac{1}{4}\Big(T_t^{\Delta_n}(M+N) - T_t^{\Delta_n}(M-N)\Big).$$

On pose :

$$< M,N >= \frac{1}{4}\Big(< M+N, M+N > - < M-N, M-N > \Big).$$

Or

$$MN = \frac{1}{4}\Big((M+N)^2 - (M-N)^2\Big)$$

donc $MN- < M,N >$ est une martingale locale continue d'après le théorème 6.2.1.

. Soit A et A' deux processus à variation finie continus tels que $MN - A$ et $MN - A'$ soient des martingales locales. Alors, $A - A'$ est une martingale locale continue à variation finie. Il existe $T_n \uparrow +\infty$ telle que $(A - A')^{T_n}$ est une martingale uniformément intégrable et à variation finie donc, pour tout n,

$$(A - A')^{T_n} = 0$$

donc, en passant à la limite, $A \equiv A'$. □

Exercice :
Soit M, N deux martingales locales et soit T un temps d'arrêt. Alors,

$$< M^T, N^T >=< M, N^T >=< M^T, N >=< M, N >^T .$$

(Indication : Montrer que $M(N - N^T)$ est une martingale locale).
Remarques :

1. L'application $(M,N) \rightarrow\ < M,N >$ est bilinéaire, symétrique et positive. Elle est aussi non dégénérée au sens où

$$< M,M >= 0 \Leftrightarrow M = M_0 \;\; p.s..$$

2. Soient M et N deux martingales locales continues.
   MN est une martingale locale $\Leftrightarrow < M,N >= 0$.

Proposition 6.2.1. *[Inégalité de Kunita-Watanabe] Soit M, N deux martingales locales continues et H et K deux processus mesurables. Alors,*

$$\int_0^\infty |H_s||K_s||d\langle\, M,N\,\rangle_s| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 \; d\langle\, M,M\,\rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 \; d\langle\, N,N\,\rangle_s\right)^{1/2}.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que les approximations de $\langle\, M,M\,\rangle$ et $\langle\, M,N\,\rangle$ obtenues dans le théorème 6.2.1. et le corollaire 6.2.1., on obtient

$$|\langle\, M,N\,\rangle_s^t| \leq \sqrt{\langle\, M,M\,\rangle_s^t}\sqrt{\langle\, N,N\,\rangle_s^t}$$

où on note $\langle M, N \rangle_s^t = \langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s$.
Soit une subdivision $s = t_0 < t_1 < \dots t_p = t$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} |\langle M, N \rangle_{t_{i-1}}^{t_i}| &\leq \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\langle M, M \rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \sqrt{\langle N, N \rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{p} \langle M, M \rangle_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{p} \langle N, N \rangle_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\langle M, M \rangle_s^t} \sqrt{\langle N, N \rangle_s^t}
\end{aligned}$$

donc, puisque $\int_s^t |d\langle M, N \rangle_u| = \sup \sum_{i=1}^{p} |\langle M, N \rangle_{t_i}^{t_{i+1}}|$, on en déduit que

$$\int_s^t |d\langle M, N \rangle_u| \leq \sqrt{\langle M, M \rangle_s^t} \sqrt{\langle N, N \rangle_s^t}$$

On généralise ensuite cette inégalité à tout borélien borné A de $\mathbb{R}^+$ par un argument de classe monotone

$$\int_A |d\langle M, N \rangle_u| \leq \sqrt{\int_A d\langle M, M \rangle_u} \sqrt{\int_A d\langle N, N \rangle_u}.$$

Soit maintenant $h = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}$ et $k = \sum_i \mu_i \mathbf{1}_{A_i}$ deux fonctions étagées positives. Alors,

$$\begin{aligned}
\int h_s k_s |d\langle M, N \rangle_u| &= \sum_i \lambda_i \mu_i \int_{A_i} |d\langle M, N \rangle_s| \\
&\leq \left(\sum \lambda_i^2 \int_{A_i} d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\sum \mu_i^2 \int_{A_i} d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2} \\
&= \left(\int h_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int k_s^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que toute fonction mesurable positive est limite d'une suite croissante de fonctions étagées. □

Proposition 6.2.2. *Une martingale locale continue M est une martingale bornée dans L^2 si et seulement si*

- *$M_0 \in L^2$.*
- *$< M, M >_\infty$ est $\mathbb{P}$-intégrable.*

Démonstration. . $\Rightarrow$ - M est bornée dans L^2 donc $M_0 \in L^2$
- Il existe une suite de temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$ telle que pour tout n, M^{T_n} soit une martingale bornée. On a

$$(*) \quad \mathbb{E}(M_{T_n \wedge t}^2) - \mathbb{E}(< M, M >_{T_n \wedge t}) = \mathbb{E}(M_0^2).$$

Comme M est bornée dans L^2, on peut passer à la limite et on obtient que

$$\mathbb{E}(M_\infty^2) - \mathbb{E}(< M, M >_\infty) = \mathbb{E}(M_0^2).$$

Donc, $< M, M >_\infty$ est intégrable.
. $\Leftarrow$ - D'après $(*)$,

$$(**) \quad \mathbb{E}(M_{T_n \wedge t}^2) \leq \mathbb{E}(< M, M >_\infty) + \mathbb{E}(M_0^2) = K < \infty.$$

D'après le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}(M_t^2) \leq \liminf_n \mathbb{E}(M_{T_n \wedge t}^2) \leq K.$$

Donc, M est bornée dans L^2.
- De plus, comme $(M_t^{T_n})_t$ est une martingale, on a

$$\mathbb{E}(M_{T_n \wedge t} | \mathcal{F}_s) = M_{T_n \wedge s} \quad p.s.$$

et on obtient en passant à la limite que

$$\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \quad p.s..$$

Par conséquent, M est une martingale. □

Remarque : Il est facile de voir que le processus $(M^2 - < M, M >)_t$ est en fait une martingale uniformément intégrable car

$$\sup_t |M_t^2 - < M, M >_t | \leq (M_\infty^\star)^2 + < M, M >_\infty \in L^1$$

avec $M_\infty^\star = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |M_t|$.

Corollaire 6.2.2. *Une martingale locale continue converge p.s. lorsque $t \to \infty$ sur l'ensemble $\{< M, M >_\infty < +\infty\}$.*

La preuve est laissée en exercice. Indication : utiliser la suite de temps d'arrêt $T_n = \inf\{t; < M, M >_t \geq n\}$ et considérer $(M_t^{T_n})_t$.

6.3 Semi-martingales continues

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus à valeurs réelles.
X est *une semi-martingale continue* si X peut s'écrire sous la forme

$$X = M + A$$

où M est une martingale locale continue et A un processus à variation finie, continu et nul en 0. Une telle décomposition est unique ; en effet, si

$$X = M + A \text{ et } X = M' + A',$$

alors $M - M' = A' - A$ est une martingale locale continue à variation finie donc c'est une constante.

Proposition 6.3.1. *Une semi-martingale continue X de décomposition $X = M + A$ admet une variation quadratique notée $< X, X >$ et*

$$< X, X > = < M, M > .$$

Démonstration. Pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
T_t^{\Delta}(X) &= \sum_{i=0}^{k-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})^2 \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 + \sum_{i=0}^{k-1}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2 + (A_t - A_{t_k})^2 \\
&+ 2\sum_{i=0}^{k-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + 2(M_t - M_{t_k})(A_t - A_{t_k})
\end{aligned}$$

Le premier terme converge en probabilité vers $< M, M >$ lorsque le pas de Δ tend vers 0. Il reste à montrer que les autres termes tendent vers 0 lorsque $|\Delta|$ tend vers 0.
Par continuité de A, on obtient

$$\left|\sum_{i=0}^{k-1}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2 + (A_t - A_{t_k})^2\right| \leq \sup_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|\ V(A)_t \to\ 0,$$

lorsque $|\Delta| \to\ 0$.
De même, par continuité de M,

$$\left|\sum_{i=0}^{k-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + (M_t - M_{t_k})(A_t - A_{t_k})\right| \leq \sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\ V(A)_t \to 0,$$

lorsque $|\Delta| \to\ 0$. □

Si $X = M + A$ et $Y = N + B$ sont deux semi-martingales continues, nous définissons *le crochet de X et de Y* par

$$< X, Y > = < M, N > = \frac{1}{4}[< X + Y, X + Y > - < X - Y, X - Y >].$$

De manière évidente, $< X, Y >_t$ est la limite en probabilité de

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

Chapitre 7

Intégrale stochastique

7.1 Intégrale stochastique par rapport à une martingale bornée dans L^2.

On note H^2 l'espace des martingales M continues et bornées dans L^2 telles que $M_0 = 0$. D'après la proposition 6.2.2., si $M \in H^2$, alors $\mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty) < +\infty$. D'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, si $M, N \in H^2$, alors $\mathbb{E}(|\langle M, N \rangle_\infty|) < +\infty$. On peut donc définir sur H^2 un produit scalaire par

$$\langle M, N \rangle_{H^2} = \mathbb{E}(\langle M, N \rangle_\infty).$$

La norme associée à ce produit scalaire est donnée par

$$||M||_{H^2} = \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty)^{1/2}.$$

Proposition 7.1.1. *L'espace H^2 est un espace de Hilbert pour la norme*

$$||M||_{H^2} = \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty)^{1/2}.$$

Démonstration. Montrons que H^2 est complet pour la norme $||.||_{H^2}$. Soit $(M^n)_n$ une suite de Cauchy de H^2 pour cette norme. D'après la proposition 6.2.2., on a

$$\lim_{m,n\to+\infty} \mathbb{E}[(M^n_\infty - M^m_\infty)^2] = \lim_{m,n\to+\infty} \mathbb{E}[\langle M^n - M^m, M^n - M^m \rangle_\infty] = 0.$$

L'inégalité de Doob entraine donc que

$$\lim_{m,n\to+\infty} \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0}(M^n_t - M^m_t)^2] = 0.$$

On peut alors construire une sous-suite n_k d'entiers telle que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_t |M^{n_k}_t - M^{n_{k+1}}_t|\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sup_t |M^{n_k}_t - M^{n_{k+1}}_t|^2\right]^{1/2} < \infty$$

On en déduit que p.s.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_t |M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}}| < \infty$$

et donc la suite $(M_t^{n_k})_{t\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une limite qu'on note M. On voit facilement que cette limite M est une martingale continue (Remarquer que $(M_t^{n_k})_{t\geq 0}$ converge aussi dans L^2 vers M car suite de Cauchy dans L^2). Comme les variables M_t^n sont uniformément bornées dans L^2, la martingale M est aussi bornée dans L^2 et donc $M \in H^2$. Enfin,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}[\langle M^{n_k} - M, M^{n_k} - M \rangle_\infty] = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}[(M_\infty^{n_k} - M_\infty)^2] = 0$$

ce qui montre que la sous-suite M^{n_k} converge p.s. donc aussi la suite (M^n) vers M dans H_2. $\square$

Si $M \in H^2$, nous appelons $\mathcal{L}^2(M)$ l'espace des processus progressivement mesurables K tels que

$$||K||_M^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty K_s^2 \; d < M, M >_s\right] < +\infty.$$

Pour tout $A \in \mathcal{P} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}_\infty$, on pose

$$\mathbb{P}_M(A) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(s,\omega) \; d < M, M >_s (\omega)\right] < +\infty.$$

$\mathbb{P}_M$ est une mesure bornée sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}^2(M)$ est l'espace des fonctions progressivement mesurables et de carré intégrables par rapport à $\mathbb{P}_M$. On notera $L^2(M)$ l'espace des classes d'équivalence des éléments de $\mathcal{L}^2(M)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme $||.||_M$ (Le produit scalaire associé est noté $(.,.)_M$).
Remarquons que $L^2(M)$ contient tous les processus adaptés, continus et bornés.
On note $\mathcal{E}$ la famille des processus élémentaires définis par

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$$

où les $H^{(i)}$ sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et bornées.

Proposition 7.1.2. *Pour tout $M \in H^2$, $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $K \in L^2(M)$ est tel que $(K,N)_M = 0$ pour tout $N \in \mathcal{E}$, alors $K = 0$. Soit $0 \leq s < t$, et F une variable $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée. Si $(H,K)_M = 0$ pour $H = F\mathbf{1}_{]s,t]} \in \mathcal{E}$, alors

$$\mathbb{E}\left[F \int_s^t K_u d\langle M, M \rangle_u\right] = 0.$$

Posons, pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = \int_0^t K_u d\langle M, M \rangle_u.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $M \in H^2$ et $K \in L^2(M)$, cette intégrale est p.s. absolument convergente et même dans L^1. Donc, pour toute variable F $\mathcal{F}_s$-mesurable, $\mathbb{E}(F(X_t - X_s)) = 0$. Puisque $X_0 = 0$ et X est à variation finie, $X = 0$ d'après le théorème 5.2.2.. Donc, presque sûrement, $K_u = 0$ $d\langle M, M \rangle_u$−p.p., donc $K = 0$ dans $L^2(M)$. $\square$

On commence par définir $\int_0^t H_s\, dM_s$ où $H \in \mathcal{E}$ un processus élémentaire défini par

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$$

où les $H^{(i)}$ sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et bornées.
On pose :

$$(H.M)_t = \int_0^t H_s\, dM_s = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\omega)(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}).$$

Pour $H \in \mathcal{E}$, $(\int_0^t H_s\, dM_s)_{t\geq 0}$ appartient à H^2 si $M \in H^2$.

Théorème 7.1.1. *i). L'application $H \to H.M$ s'étend à une isométrie de $L^2(M)$ dans H^2.*
ii). De plus, $H.M$ est caractérisée par la relation

$$< H.M, N >= H. < M, N >, \forall N \in H^2.$$

Démonstration. i). : Si $H \in \mathcal{E}$, alors $H.M$ est la somme des martingales $M_t^{(i)} = H^{(i)}(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i})$ telles que $\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_t = 0$ si $i \neq j$ et

$$\langle M^{(i)}, M^{(i)} \rangle_t = (H^{(i)})^2(\langle M, M \rangle_{t\wedge t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t\wedge t_i}).$$

Par conséquent,

$$\langle H.M, H.M \rangle_t = \sum_{i=0}^{p-1}(H^{(i)})^2(\langle M, M \rangle_{t\wedge t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t\wedge t_i})$$

et donc

$$\begin{aligned} ||H.M||_{H^2}^2 &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p-1}(H^{(i)})^2(\langle M, M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t_i})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 d < M, M >_s\right] \\ &= ||H||_M^2. \end{aligned}$$

L'application $H \to H.M$ est donc une isométie de $\mathcal{E}$ dans H^2. D'après la proposition 7.1.2., $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$ et H^2 est un espace de Hilbert, on peut donc prolonger de manière unique cette application en une isométrie de $L^2(M)$ dans H^2.

ii). : Si $H \in \mathcal{E}$,

$$\langle H.M, N \rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \langle M^{(i)}, N \rangle$$

et

$$\langle M^{(i)}, N \rangle_t = H^{(i)}(\langle M, N \rangle_{t \wedge t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_{t \wedge t_i}).$$

On en déduit donc que

$$\langle H.M, N \rangle_t = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\langle M, N \rangle_{t \wedge t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_{t \wedge t_i}) = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Donc, ii) est prouvée si $H \in \mathcal{E}$. D'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, pour tout $N \in H^2$, l'application $X \to \langle X, N \rangle_\infty$ est continue de H^2 dans L^1. Si $H^n \in \mathcal{E}$ et $H^n \to H$ dans $L^2(M)$, on a

$$\langle H.M, N \rangle_\infty = \lim_{n \to +\infty} \langle H^n.M, N \rangle_\infty = \lim_{n \to +\infty} (H^n.\langle M, N \rangle)_\infty = (H.\langle M, N \rangle)_\infty$$

où les convergences ont lieu dans L^1. La dernière égalité découle de l'inégalité de Kunita-Watanabe :

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^\infty (H_s^n - H_s) d\langle M, N \rangle_s\right|\right] \leq \mathbb{E}[\langle N, N \rangle_\infty]^{1/2} ||H^n - H||_M.$$

En prenant N^t au lieu de N dans l'égalité $\langle H.M, N \rangle_\infty = (H.\langle M, N \rangle)_\infty$, on en déduit ii).
$H.M$ est caractérisée par ii), au sens où si X est une autre martingale de H^2, on a pour tout $N \in H^2$,

$$\langle H.M - X, N \rangle = 0$$

et donc, en prenant $N = H.M - X$, on trouve que $X = H.M$. □

Proposition 7.1.3. *Si $K \in L^2(M)$ et $H \in L^2(K.M)$, alors $HK \in L^2(M)$ et*

$$(HK).M = H.(K.M).$$

Démonstration. Premièrement,

$$< K.M, K.M >= K^2. < M, M >$$

donc $HK \in L^2(M)$. De plus, d'après le théorème 7.1.1., pour tout $N \in H^2$,

$$\begin{aligned} <(HK).M, N> &= (HK). <M, N> \\ &= H.(K. <M, N>) \\ &= H. <K.M, N> \\ &= <H.(K.M), N> \end{aligned}$$

□

Proposition 7.1.4. *Si T est un temps d'arrêt et si $M \in H^2$,*

$$K.M^T = K\mathbf{1}_{[0,T]}.M = (K.M)^T.$$

Démonstration. On a $M^T = \mathbf{1}_{[0,T]}.M$ car pour tout $N \in H^2$,

$$<M^T, N> = <M, N>^T = \mathbf{1}_{[0,T]}. <M, N> = <\mathbf{1}_{[0,T]}.M, N> .$$

Par la proposition précédente,

$$K.M^T = K.(\mathbf{1}_{[0,T]}.M) = K\mathbf{1}_{[0,T]}.M$$

et

$$(K.M)^T = \mathbf{1}_{[0,T]}.(K.M) = \mathbf{1}_{[0,T]}K.M.$$

□

La martingale $H.M$ est appelée *intégrale stochastique de H par rapport à M* et est notée

$$\int_0^{\cdot} H_s \, dM_s.$$

7.2 Intégrale stochastique par rapport à une martingale locale

Soit B un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait que $B \notin H^2$ mais par contre, B arrêté en t appartient à H^2. Donc, on peut définir $\int_0^t H_s \, dB_s$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ si H satisfait

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, ds\right] < \infty.$$

Si M est une martingale locale continue, on note $L^2_{loc}(M)$ l'ensemble des processus H progressivement mesurables tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T_n} H_s^2 \, d <M, M>_s\right] < \infty$$

où T_n est une suite de temps d'arrêt $\uparrow +\infty$ p.s..

Proposition 7.2.1. *Pour tout $H \in L^2_{loc}(M)$, il existe une unique martingale locale continue, nulle en 0, notée $H.M$, telle que pour toute martingale locale continue N,*

$$< H.M, N >= H. < M, N > .$$

Démonstration. On peut construire une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n \uparrow +\infty$ tels que $M^{T_n} \in H^2$ et $H^{T_n} \in L^2(M^{T_n})$. Donc, pour tout n, on peut définir l'intégrale stochastique,

$$X^{(n)} = H^{T_n}.M^{T_n} \in H^2.$$

Si on arrête $X^{(n+1)}$ en T_n, on obtient

$$\begin{aligned} (X^{(n+1)})^{T_n} &= (H^{T_{n+1}}.M^{T_{n+1}})^{T_n} \\ &= H^{T_{n+1}}\mathbf{1}_{[0,T_n]}.M^{T_{n+1}} \\ &= H\mathbf{1}_{[0,T_n]}.M^{T_n} \end{aligned}$$

On peut donc définir $H.M$ en posant

$$(H.M)_t = X_t^{(n)} \text{ sur } [0, T_n].$$

$(H.M)_t$ est une martingale locale continue car $(H.M)^{T_n} = X^{(n)} \in H^2$.
On a clairement

$$< H.M, N >= H. < M, N >$$

puisque

$$< H.M, N >^{T_n}= (H. < M, N >)^{T_n}$$

où $(T_n)_n \uparrow +\infty$. □

$H.M$ l'intégrale stochastique de H par rapport à M est notée

$$\int_0^{\cdot} H_s \, dM_s.$$

Un processus progressivement mesurable H est dit *localement borné* si il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n \uparrow +\infty$ et des constantes C_n tels que

$$|H^{T_n}| \leq C_n.$$

Un processus H adapté et continu est localement borné : il suffit de choisir les temps d'arrêt

$$T_n = \inf\{t; |H_t| \geq n\}.$$

L'intérêt de cette définition est que si H est progressivement mesurable et localement borné, alors pour toute martingale locale continue M, on a $H \in L^2_{loc}(M)$.

7.3 Intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale continue

Soit $X = M + A$ une semi-martingale continue, soit H un processus localement borné, alors *l'intégrale stochastique de H par rapport à X* est la semi-martingale continue :

$$H.X = H.M + H.A$$

où $H.M$ est l'intégrale de H par rapport à la martingale locale continue M et $H.A$ l'intégrale de H par rapport à A au sens de l'intégrale de Stieltjes. La semi-martingale $H.X$ est notée

$$\int_0^{\cdot} H_s \, dX_s.$$

Propriétés de l'intégrale stochastique :

- L'application $(H, X) \to H.X$ est bilinéaire.
- Si H et K sont localement bornés, alors $H.(K.X) = (HK).X$.
- Pour tout temps d'arrêt T, $(H.X)^T = H\mathbf{1}_{[0,T]}.X = H.X^T$.
- Si X est une martingale locale (resp. un processus à variation finie), alors $H.X$ est une martingale locale (resp. un processus à variation finie).
- Si $H \in \mathcal{E}$ s'écrit $H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$ avec $H^{(i)}$ $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée, alors

$$(H.X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(X_{t\wedge t_{i+1}} - X_{t\wedge t_i}).$$

Nous prouvons maintenant un théorème de type convergence dominée pour les intégrales stochastiques.

Théorème 7.3.1. *Soit X une semi-martingale continue. Si $(H^n)_n$ est une suite de processus continus, localement bornés, convergeant ponctuellement vers 0 et si il existe un processus localement borné H tel que $|H^n| \leq H$ pour tout n, alors $H^n.X$ converge vers 0 en probabilité, uniformément sur tout intervalle compact.*

Démonstration. On se restreint au cas où X est une martingale locale continue. Soit T_n la suite de temps d'arrêt localisant X, alors $(H^n)^{T_m}$ converge vers 0 dans $L^2(X^{T_m})$ et d'après le théorème 7.1.1., $(H^n.X)^{T_m}$ converge vers 0 dans H^2. On conclut comme dans la preuve du théorème 6.2.1. $\square$

Le prochain résultat est le point crucial dans la preuve de la formule de Itô qu'on verra par la suite.

Proposition 7.3.1. *Si H est un processus continu à gauche, adapté et si $(\Delta_n)_n$ est une suite de subdivisions de $[0,t]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$, alors*

$$\int_0^t H_s\, dX_s = \mathbb{P} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i^n \in \Delta_n} H_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}).$$

Démonstration. Si H est borné, les sommes de droite sont les intégrales stochastiques des processus élémentaires $\sum_i H^{(i)} \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$ qui convergent ponctuellement vers H et sont bornés par $||H||_\infty$; par conséquent, le résultat découle directement du théorème précédent. Le cas général est obtenu en utilisant les techniques de localisation. □

7.4 Formule d'intégration par parties

Soit X, Y deux semi-martingales continues.

Proposition 7.4.1.

$$i).\quad X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + < X, Y >_t .$$

$$ii).\quad X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\, dX_s + < X, X >_t .$$

Exemple : $X_t = B_t$ le mouvement Brownien réel standard, $< B, B >_t = t$, $B_0 = 0$. On a alors :

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s\, dB_s.$$

On en déduit en particulier que $(\int_0^t B_s\, dB_s)_t$ est une martingale.

Démonstration. i). Si ii) est montré, on l'applique à $X+Y$ et à $X-Y$:

$$\begin{aligned}
X_tY_t &= \frac{1}{4}[(X_t+Y_t)^2 - (X_t-Y_t)^2] \\
&= \frac{1}{4}[(X_0+Y_0)^2 - (X_0-Y_0)^2] \\
&+ \frac{1}{4}[2\int_0^t (X_s+Y_s)\, d(X_s+Y_s) - 2\int_0^t (X_s-Y_s)\, d(X_s-Y_s)] \\
&+ \frac{1}{4}[< X+Y, X+Y >_t - < X-Y, X-Y >_t] \\
&= X_0Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + < X, Y >_t
\end{aligned}$$

puisque par définition

$$< X, Y >_t = \frac{1}{4}[< X+Y, X+Y >_t - < X-Y, X-Y >_t]$$

ii) Démontrons ii). Soit $(\Delta_n)_n$ une suite de subdivisions de $[0,t]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$.
Alors,

$$\begin{aligned} X_t^2 - X_0^2 &= \sum_i (X_{t_{i+1}^n}^2 - X_{t_i^n}^2) \\ &= 2\sum_i X_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \end{aligned}$$

Donc, lorsque $|\Delta_n| \to 0$, $X_t^2 - X_0^2$ converge en probabilité vers

$$2\int_0^t X_s \, dX_s + < X, X >_t .$$

□

7.5 Formule de changement de variables de Itô

Soit d un entier, $X = (X^1, \ldots, X^d)$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une semi-martingale si chaque composante $X^i, i = 1, \ldots, d$, est une semi-martingale réelle.

Théorème 7.5.1. [Formule de Itô] *Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction C^2, X une semi-martingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors, $F(X)$ est une semi-martingale et*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)_s \, dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X)_s \, d < X^i, X^j >_s .$$

Exemple : Soit $X_t = (B_t^1, B_t^2)$ où $(B_t^1)_t$, $(B_t^2)_t$ sont deux mouvements Browniens réels standard indépendants.
Remarquons que $< B^1, B^2 >= 0$ car le produit $(B^1 B^2)_t$ est une martingale.

Démonstration. On se restreint au cas $d = 1$.
a) Soit $G(x)$ un monôme tel que la formule est satisfaite pour G (Prendre, par exemple, $G(x) = x^2$). Soit $F(x) = xG(x)$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$F(X_t) = X_t G(X_t) = X_0 G(X_0) + \int_0^t X_s \, dG(X_s) + \int_0^t G(X_s) \, dX_s + < X, G(X) >_t .$$

Or,

$$G(X_t) = G(X_0) + \int_0^t G'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t G''(X_s)\ d < X, X >_s .$$

On en déduit que

$$\int_0^t X_s\ dG(X_s) = \int_0^t X_s G'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s G''(X_s)\ d < X, X >_s$$

et que

$$\begin{aligned} < X, G(X) >_t &= < X, \int_0^{\cdot} G'(X_s)\ dX_s >_t + \frac{1}{2}\langle X, \int_0^{\cdot} G''(X_s)\ d < X, X >_s \rangle_t \\ &= \int_0^t G'(X_s)\ d < X, X >_s \end{aligned}$$

(car $(\int_0^{\cdot} G''(X_s)\ d < X, X >_t)_t$ est à variation finie).
Donc,

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \int_0^t (G(X_s) + X_s G'(X_s))\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t (X_s G''(X_s) + 2G'(X_s))\ d < X, X >_s \\ &= F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\ d < X, X >_s \end{aligned}$$

b) On passe trivialement du cas monôme au cas polynôme.
c) Cas général : soit F une fonction de classe C^2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T_n = \inf\{t; |X_t| \geq n\}$. Pour tout n, il existe une suite de polynômes $(F^{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers F sur l'intervalle $[-n, n]$ lorsque m tend vers l'infini. De plus, $(F^{n,m'})_{m\in\mathbb{N}}$ et $(F^{n,m''})_{m\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers F' et F'' respectivement sur l'intervalle $[-n, n]$. Pour tout $t > 0$, sur l'ensemble $\{T_n \geq t\}$, on a les convergences suivantes lorsque $m \to +\infty$,

$$F^{n,m}(X_t) \to F(X_t)$$

$$F^{n,m'}(X_t) \to F'(X_t)$$

$$F^{n,m''}(X_t) \to F''(X_t)$$

$(F^{n,m})$ étant un polynôme, on a la formule

$$F^{n,m}(X_{t\wedge T_n}) = F^{n,m}(X_0) + \int_0^{t\wedge T_n} F^{n,m'}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T_n} F^{n,m''}(X_s)\, d < X, X >_s .$$

Sur l'intervalle $\{T_n > 0\}$, on laisse m tendre vers $+\infty$ et on applique le théorème de convergence dominée. $\square$

Remarques : 1- Forme différentielle de la formule de Itô :

$$dF(X_t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_t)\; dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_t)\; d < X^i, X^j >_t .$$

2- Si X est une semi-martingale réelle, alors par la formule de Itô, si F est une fonction de classe C^2, alors $F(X_t)$ est une semi-martingale réelle. La classe des semi-martingales reste donc invariante par la composition avec des fonctions C^2, ce qui n'est pas vrai pour la classe des martingales locales.

7.6 Applications de la formule de Itô

La formule d' Itô a eu de nombreuses applications, on en présente quelques unes ici.

7.6.1 Exponentielle de Doléans d'une martingale locale continue

Théorème 7.6.1. *Soit X une martingale locale continue, λ un nombre complexe, alors l'équation suivante (en Z)*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s\; d(\lambda X_s) \tag{7.1}$$

admet une unique solution qui est la martingale locale continue :

$$Z_t = \exp\left[\lambda(X_t - X_0) - \frac{\lambda^2}{2} < X, X >_t\right].$$

Le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est appelée exponentielle de Doléans de λX *et notée*

$$Z = \mathcal{E}(\lambda X).$$

Démonstration. a) *Existence :* On suppose que $X_0 = 0$. On applique la formule de Itô avec la fonction $F(x) = e^x$ et $Y_s = \lambda X_s - \frac{\lambda^2}{2} < X, X >_s$:

$$F(Y_t) = F(Y_0) + \int_0^t e^{Y_s}\; dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{Y_s}\; d < Y, Y >_s$$

soit encore

$$e^{\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} <X,X>_t} = 1 + \int_0^t e^{\lambda X_s - \frac{\lambda^2}{2} <X,X>_s}\; d(\lambda X_s)$$

en remarquant que

$$< Y, Y >_t = < \lambda X, \lambda X >_t = \lambda^2 < X, X >_t .$$

b) *Unicité :* Soit Y une autre solution de (7.1). On applique la formule de Itô avec la fonction $F(u,v) = u/v$ et $u = Y_s$, $v = \mathcal{E}(\lambda X)_s$:

$$\frac{Y_t}{\mathcal{E}(\lambda X)_t} = 1 + \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(\lambda X)_s}\, dY_s - \int_0^t \frac{Y_s}{(\mathcal{E}(\lambda X)_s)^2}\, d\mathcal{E}(\lambda X)_s$$

$$- \int_0^t \frac{1}{(\mathcal{E}(\lambda X)_s)^2}\, d < Y, \mathcal{E}(\lambda X) >_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2Y_s}{(\mathcal{E}(\lambda X)_s)^3}\, d < \mathcal{E}(\lambda X), \mathcal{E}(\lambda X) >_s .$$

. Comme Y et $\mathcal{E}(\lambda X)$ sont solutions de (7.1), on en déduit que $d\mathcal{E}(\lambda X) = \mathcal{E}(\lambda X)d(\lambda X)$ et $dY_s = Y_s d(\lambda X_s)$.
. $< Y, \mathcal{E}(\lambda X) >_s = < \int Y d(\lambda X), \int \mathcal{E}(\lambda X)\, d(\lambda X) >= (Y\mathcal{E}(\lambda X)). < \lambda X, \lambda X >$ donc

$$d < Y, \mathcal{E}(\lambda X) >_s = Y\mathcal{E}(\lambda X) d < \lambda X, \lambda X > .$$

. $d < \mathcal{E}(\lambda X), \mathcal{E}(\lambda X) >_s = \mathcal{E}(\lambda X)_s^2\ d < \lambda X, \lambda X >_s$.
On en déduit après quelques calculs que $Y_t = \mathcal{E}(\lambda X)_t$ pour tout t □

Caractérisation du mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Théorème 7.6.2. *Soit M une martingale locale continue, réelle, nulle en 0, telle que $< M, M >_t = t$ pour tout t. Alors, M est un $(\mathcal{F}_t)_t$-mouvement Brownien.*

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(iuM_t) = \exp(iuM_t + \frac{u^2}{2}t)$ est une martingale locale d'après le théorème précédent et

$$|\mathcal{E}(iuM_t)| = \exp(\frac{u^2}{2}t),$$

donc $(\mathcal{E}(iuM_s))_{s\in[0,t]}$ est une martingale bornée (cf chapitre précédent). Pour tout s, t tels que $s \le t$, on a donc

$$\mathbb{E}(\exp(iu(M_t - M_s))|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{E}(iuM_t)}{\mathcal{E}(iuM_s)} \exp(-\frac{u^2}{2}(t-s))|\mathcal{F}_s)\right) = \exp(-\frac{u^2}{2}(t-s)).$$

Par conséquent, $M_t - M_s$ suit une loi Normale $\mathcal{N}(0, t-s)$ et est indépendante de $\mathcal{F}_s$. □

7.6.2 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Le but de ce paragraphe est d'étudier comment se transforme la notion de martingale locale lorsque la probabilité $\mathbb{P}$ est remplacée par une probabilité $\mathbb{Q}$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. Nous commençons par rappeler le théorème d'existence de la densité de Radon-Nikodym. La preuve est omise.

Théorème 7.6.3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré. Soit* $\mathbb{Q}$ *une mesure absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *:* $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ *(i.e. pour tout* $A \in \mathcal{F}$*,* $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$*).*
Alors, il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}$*-mesurable, positive telle que pour tout* $A \in \mathcal{F}$*,*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z \; d\mathbb{P}.$$

Alors,

$$Z = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$$

est appelée la densité de Radon-Nikodym.

On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$Z_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t).$$

Alors, $(Z_t)_t$ est une martingale continue à droite et uniformément intégrable. Soit T un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$. On pose $\mathbb{Q}_T = \mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_T}$, $\mathbb{P}_T = \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_T}$ les mesures $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ restreintes à la tribu $\mathcal{F}_T$ des événements antérieurs à T. Alors, on montre facilement que

$$Z_T = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_T}{\mathrm{d}\mathbb{P}_T}.$$

Les preuves des deux lemmes suivants sont laissées en exercices.

Lemme 7.6.1. $(Z_t)_t$ *est* $\mathbb{Q}$*-p.s. strictement positive.*

On suppose que $t \to Z_t$ est continue.

Lemme 7.6.2. *Soit* X *continu, adapté. Si le processus* XZ *est une* $\mathbb{P}$*-martingale locale, alors* X *est une* $\mathbb{Q}$*-martingale locale.*

Théorème 7.6.4. *[Girsanov] Soit* Q *une mesure absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *sur* $\mathcal{F}_\infty$*. On suppose que* $(Z_t)_t$ *est continue. Alors,*
i). chaque $\mathbb{P}-$*semi-martingale est une* $\mathbb{Q}-$*semi-martingale.*
ii). si M *est une* $\mathbb{P}-$*martingale locale continue et si*

$$M' = M - \frac{1}{Z}. < M, Z >,$$

alors M' *est bien définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{Q})$ *et* $(M'_t)_t$ *est une* $\mathbb{Q}-$*martingale locale. De plus,*

$$< M', M' >=< M, M > \qquad \mathbb{Q} - p.s.$$

Démonstration. Supposons que ii) soit prouvée. Si X est une $\mathbb{P}-$semi-martingale s'écrivant $X = M + A$ (pour $\mathbb{P}$), alors

$$X = M' + \frac{1}{Z}. < M, Z > +A$$

est une $\mathbb{Q}-$semi-martingale.
On montre maintenant ii). Tout d'abord, M' est bien définie (pour $\mathbb{Q}$) car $1/Z$ est $\mathbb{Q}$-localement borné (d'après le lemme 7.6.1). Montrons que $M'Z$ est une $\mathbb{P}-$martingale locale. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} M'_t Z_t &= M'_0 Z_0 + \int_0^t M'_s dZ_s + \int_0^t Z_s \, dM'_s + < M', Z >_t \\ &= M'_0 Z_0 + \int_0^t M'_s dZ_s + \int_0^t Z_s \, dM_s. \end{aligned}$$

On utilise le lemme 7.6.2 pour conclure. □

Les deux corollaires suivants démontrent (si besoin !) l'intérêt du théorème de Girsanov :

Corollaire 7.6.1. *Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-mouvement Brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on définit*

$$\tilde{B}_t = B_t - \frac{1}{Z}. < B, Z >_t .$$

Alors, $(\tilde{B}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{Q})$.

Démonstration. Utiliser le théorème 7.6.2. □

Corollaire 7.6.2. *Soit L une martingale locale continue sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ telle que $L_0 = 0$. On suppose que*

$$\mathbb{E}\left[\exp(\frac{1}{2} < L, L >_\infty)\right] < \infty.$$

Alors,
i) $\mathcal{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable.
ii) si on définit $\tilde{B}_t = B_t - < L, B >_t$, alors $(\tilde{B}_t)_t$ est un $\mathbb{Q}-$mouvement Brownien si $(B_t)_t$ est un $\mathbb{P}-$mouvement Brownien.

Démonstration. La preuve du i) repose sur l'exercice 7.1 et ii) est évident. □

7.6.3 Inégalité de Burkholder

Théorème 7.6.5. *Soit M une martingale continue telle que*

$$\mathbb{E}(< M, M >_T^{p/2}) < \infty$$

où $T > 0$ est fixé, $M_0 = 0$ et $p \geq 2$. Alors,
i) il existe une constante C'_p (ne dépendant pas de M) telle que

$$\forall t \leq T, \mathbb{E}(|M_t|^p) \leq C'_p \mathbb{E}(< M, M >_t^{p/2}).$$

ii) il existe une constante C_p (ne dépendant pas de M) telle que

$$\mathbb{E}(\sup_{t \leq T} |M_t|^p) \leq C_p \mathbb{E}(< M, M >_T^{p/2}).$$

Démonstration. On suppose tout d'abord M bornée. On applique la formule de Itô avec $F(x) = |x|^p$, $p \geq 2$ et $x = M$.

$$|M_t|^p = p \int_0^t |M_s|^{p-1} \operatorname{sgn}(M_s)\ dM_s + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^t |M_s|^{p-2}\ d < M, M >_s$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|M_t|^p) &= \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^t |M_s|^{p-2}\ d < M, M >_s\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\left[\sup_{s \leq t} |M_s|^{p-2}\ < M, M >_t\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2} \left(\mathbb{E}\left[\sup_{s \leq t} |M_s|^p\right]\right)^{(p-2)/p} \left(\mathbb{E}\left[< M, M >_t^{p/2}\right]\right)^{2/p}
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder.
Donc,

$$\mathbb{E}(|M_t|^p)^p \leq (\frac{p(p-1)}{2})^p \left(\mathbb{E}\left[\sup_{s \leq t} |M_s|^p\right]\right)^{p-2} \left(\mathbb{E}\left[< M, M >_t^{p/2}\right]\right)^2$$

D'après l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \leq t} |M_s|^p\right] \leq q^p \mathbb{E}(|M_t|^p)$$

pour q tel que $1/p + 1/q = 1$.
Donc,

$$\mathbb{E}(|M_t|^p)^p \leq (\frac{p(p-1)}{2} q^{p-2})^p \mathbb{E}(|M_t|^p)^{p-2} \left(\mathbb{E}\left[< M, M >_t^{p/2}\right]\right)^2$$

soit encore

$$\mathbb{E}(|M_t|^p) \leq (\frac{p(p-1)}{2} q^{p-2})^{p/2} \left(\mathbb{E}\left[< M, M >_t^{p/2}\right]\right).$$

L'extension de la formule à toute martingale continue s'obtient en considérant les temps d'arrêt

$$T_n = \inf\{t; |M_t| \geq n\}.$$

□

EXERCICES

Exercice 7.1 : Soit Z une martingale locale continue positive définie sur un espace filtré donné et de valeur initiale 1.
I.
a) Montrer que Z est une surmartingale positive et que $\mathbb{E}(Z_\infty) \leq 1$.
b) Montrer que Z est une martingale uniformément intégrable si et seulement si $\mathbb{E}(Z_\infty) = 1$.
II.
On considère Z de la forme $Z = \mathcal{E}(M)$ où M est une martingale locale continue ($\mathcal{E}(M)$ désigne l'exponentielle de Doléans de M) et on suppose que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} < M, M >_\infty\right)\right] < \infty.$$

a) Montrer que $< M, M >_\infty$ est intégrable et que M converge presque sûrement lorsque t tend vers l'infini.
b) Soit $0 < \lambda < 1$. Montrer que que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = (\mathcal{E}(M)_t)^\lambda \exp\left[(\lambda(1-\lambda)/2) < M, M >_t\right]$$

et que $\mathcal{E}(\lambda\ M)$ est une martingale uniformément intégrable.
(On pourra appliquer l'inégalité de Hölder avec l'exposant $p = 1/\lambda$).
c) Déduire de ce qui précède en faisant tendre λ vers 1 que

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(M)_\infty] \geq 1$$

et que $\mathcal{E}(M)$ est une martingale uniformément intégrable.

Exercice 7.2 : I. Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale continue réelle définie sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, $M_0 = 0$. Soit $A = (A_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté continu croissant, nul en 0. On considère le processus $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ défini par :

$$Z_t = \int_0^t \frac{dM_s}{1 + A_s}$$

a) Montrer que $M_t = \int_0^t (Z_t - Z_s)\ dA_s + Z_t$.
b) Montrer que pour tout u tel que $0 < u < t$, on a :

$$\left|\frac{M_t}{1 + A_t}\right| \leq \frac{|Z_t|}{1 + A_t} + \frac{\int_0^u (Z_t - Z_s)\ dA_s}{1 + A_t} + \frac{A_t - A_u}{1 + A_t} \sup_{u<s\leq t} |Z_t - Z_s|.$$

c) On suppose que $(Z_t)_{t\geq 0}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers une limite finie lorsque t tend vers l'infini. Déduire de ce qui précède que sur l'ensemble $\{A_\infty = \infty\}$:

$$\frac{M_t}{1 + A_t} \to 0 \quad \mathbb{P} - p.s. \text{ quand } \ t \to \infty.$$

II. Soit $L = (L_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale continue réelle définie sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, nulle en 0. Montrer que $(L_t)_{t\geq 0}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. sur l'ensemble $\{< L, L >_\infty < \infty\}$ vers une limite finie lorsque t tend vers l'infini. (Indication : on pourra considérer la martingale locale $L^2 - < L, L >$ et pour chaque n, le temps $T_n = \inf\{t; < L, L >_t \geq n\}$ si $\{-\} \neq \emptyset$ et $T_n = \infty$ si $\{-\} = \emptyset$, puis étudier le comportement de $L^2 - < L, L >$ sur les ensembles $A_p = \{< L, L >_\infty < p\}$ où $p \in \mathbb{N}$).

Exercice 7.3 : Soit M une martingale locale continue nulle à l'origine. On pose

$$L_t = \sup_{s\leq t} M_s \quad \text{et} \quad U_t = L_t - M_t.$$

Soit a un nombre réel négatif et b un réel positif fixés.
a) En appliquant la formule de Itô à la fonction : $(x, y) \to F(x, y) = xy$ où $x = \exp(aL - (b^2/2) < M, M >)$ et $y = \phi(U_t)$ où ϕ est une fonction de classe C^2, montrer que

$$Z = \phi(U) \exp(aL - (b^2/2) < M, M >)$$

est une martingale locale lorsque pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\int_0^t (a\phi(U_s) + \phi'(U_s))\, dL_s = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^t (b^2\phi(U_s) + \phi''(U_s))\, d < M, M >_s = 0$$

Montrer que la fonction ϕ définie par : $\phi(x) = b\cosh(bx) - a\sinh(bx)$ convient.
b) Soit $\lambda > 0$. On définit les temps d'arrêt suivants :

$$T = \begin{cases} \inf\{t; U_t > \lambda\} \text{ si } \{-\} \neq \emptyset \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$S = \begin{cases} \inf\{t; M_t < -\lambda\} \text{ si } \{-\} \neq \emptyset \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que Z^T et $\mathcal{E}(aM^S)$ sont des martingales bornées et que

$$\mathbb{E}\left[\exp(-a^2/2 < M, M >_S)\right] \geq \frac{1}{\exp(-a\lambda)}.$$

c) On suppose que $< M, M >_\infty = \infty$ $\mathbb{P}$-p.s., déduire de ce qui précède que

$$\mathbb{P}(S < \infty) \geq \frac{1}{\exp(-a\lambda)}$$

puis que $\mathbb{P}(S < \infty) = 1$ et enfin que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.
d) Montrer que

$$\mathbb{E}[\exp(aL_t - (b^2)/2 < M, M >_t)] = b/(b\cosh(b\lambda) - a\sinh(b\lambda)).$$

e) En déduire que L_T suit une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$.

Exercice 7.4 : Soit X un processus continu indépendant d'une tribu $\mathcal{F}$ et tel que

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq K}|X_t|) < \infty.$$

Soit T une variable aléatoire positive $\mathcal{F}$-mesurable et bornée par le nombre K.
Montrer que

$$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}) = \phi(T)$$

où $\phi(t) = \mathbb{E}[X_t]$.
(Indication : commencer par traiter le cas où T est une combinaison finie d'indicatrices.)

Exercice 7.5 : Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien réel standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$, la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ étant continue à droite. Etant donné $a > 0$, on définit le temps d'arrêt T_a par

$$T_a = \begin{cases} \inf\{t;\ B_t \geq a\} \text{ si } \{\ \} \neq \emptyset \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases}$$

1) On note $Z = \mathcal{E}(\lambda B^{T_a})$ l'exponentielle de Doléans de λB^{T_a} où λ est un réel positif donné.
a)- Montrer que Z est une martingale bornée. En utilisant $\mathbb{E}(Z_\infty)$ et en faisant tendre λ vers 0, montrer que

$$\mathbb{P}[T_a < \infty] = 1.$$

b)- Calculer $\mathbb{E}[\exp(-\lambda T_a)]$.

2) On considère maintenant la martingale locale $M = \mathcal{E}(iuB)$ l'exponentielle de Doléans de iuB où u est un nombre réel.
a)- Montrer que pour tout $s, t \in\ [0, +\infty[$ tels que $s < t$, pour tout $K > 0$, on a

$$\mathbb{E}[\exp\{iu(B_{(T_a\wedge k)+t} - B_{(T_a\wedge k)+s})\}|\mathcal{F}_{(T_a\wedge k)+s}] = \exp\{-\frac{u^2}{2}(t-s)\}.$$

(Indication : utiliser la martingale locale arrêtée $\mathcal{E}(iuB^{(T_a\wedge k)+t})$).
b)- En déduire, en faisant tendre K vers l'infini, que le processus $B(T_a)$ défini par

$$B(T_a)_t = B_{T_a+t} - B_{T_a}$$

est un mouvement Brownien relatif à la filtration $(\mathcal{G}_t)_t$ où $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T_a+t}$. Montrer que pour tout $t > 0$, $B(T_a)_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$.

3) Soit $b > a$. On considère T_b défini de façon analogue à T_a.
a)- Montrer que $T_b - T_a$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{G}_t)_t$.
b)- En utilisant la martingale $\mathcal{E}(\lambda B^{T_b})$ montrer que

$$\mathbb{E}[\exp\{-\frac{\lambda^2}{2}(T_b - T_a)\}|\mathcal{F}_{T_a}] = \exp\{-\lambda(b-a)\}.$$

c)- En déduire que le processus $(T_a)_{a\geq 0}$ est à accroissements indépendants.

Les questions suivantes sont indépendantes de la question 3). Le résultat de l'exercice 7.4 est utile pour la question 4).

4) a)- Montrer que pour toute fonction borélienne bornée f, on a

$$\mathbb{E}[f(B_t)\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}\psi(t-T_a)]$$

où $\psi(u) = \mathbb{E}[f(B_u + a)]$.
b)- En remarquant que $\mathbb{E}[f(B_u + a)] = \mathbb{E}[f(-B_u + a)]$, déduire de a) que

$$\mathbb{E}[f(B_t)\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}] = \mathbb{E}[f(2a - B_t)\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}].$$

5) Montrer que, en notant $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$, et pour $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}[B_t \leq a; S_t \geq a] = \mathbb{P}[B_t \geq a; S_t \geq a] = \mathbb{P}[B_t \geq a] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[S_t \geq a].$$

En déduire que S_t suit la même loi que $|B_t|$.
6) Démontrer que pour $a \geq b$ et $a \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}[B_t \leq b; S_t \geq a] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b; S_t \geq a] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b].$$

Démontrer que pour $a \leq b$ et $a \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}[B_t \leq b; S_t \geq a] = 2\mathbb{P}[B_t \geq a] - \mathbb{P}[B_t \geq b].$$

7) Vérifier que la loi du couple (B_t, S_t) est donnée par la densité :

$$\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}}\mathbf{1}_{\{y\geq x\}}\frac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left\{-\frac{(2y-x)^2}{2t}\right\}$$

Exercice 7.6 : Soit a, b et X des processus à valeurs réelles définis sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$. Les processus a et b sont progressivement mesurables et localement bornés ; X est continu et $X_0 = 0$. Pour toute fonction f de variables réelles et de classe C^2, on pose :

$$L_s(\omega)f(x) = \frac{1}{2}a_s^2(\omega)f''(x) + b_s(\omega)f'(x)$$

$$\text{et} \quad M_t(f) = f(X_t) - \int_0^t L_s f(X_s)\,ds.$$

1) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour toute fonction f de classe C^2, $M(f)$ est une martingale locale.
(ii) Le processus M défini par :

$$M_t = X_t - \int_0^t b_s \; ds$$

est une martingale locale, de variation quadratique :

$$< M, M >_t = \int_0^t a_s^2 \; ds.$$

2) Pour λ réel, on note $\mathcal{E}_t^\lambda = \exp\{\lambda X_t - \lambda \int_0^t b_s \; ds - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t a_s^2 \; ds\}$. On considère l'assertion suivante :
(iii) Pour tout λ réel, $\mathcal{E}^\lambda$ est une martingale locale.
a)- Montrer que (ii) implique (iii).
b)- Montrer que (iii) implique (i) pour toutes les fonctions f de la forme $f(x) = \exp(\lambda x)$.
(Indication : considérer le processus V tel que $\exp(\lambda X) = \mathcal{E}^\lambda V$).
c)- En déduire par un argument de densité que (iii) implique (i).

Exercice 7.7 : Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)})$ un mouvement Brownien de dimension 3 (i.e. pour $i = 1, 2, 3$, $(B_t^{(i)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont trois mouvements Brownien réels indépendants) issu de $x \neq 0$. Pour tout $t \geq 0$, on pose :

$$R_t = \sqrt{(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2 + (B_t^{(3)})^2}.$$

1) Montrer que $(\frac{1}{R_t})_{t\geq 0}$ est une martingale locale. (Indication : utiliser la formule d'Itô).
2) Calculer pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(\frac{1}{R_t})$ et $\mathbb{E}(\frac{1}{R_t^2})$.
3) En déduire que $(\frac{1}{R_t})_{t\geq 1}$ est une martingale locale uniformément intégrable, mais n'est pas une martingale.

Chapitre 8

Equations différentielles stochastiques

Le but de ce chapitre est de donner un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t).$$

Ces équations décrivent en général l'évolution dans le temps d'un système physique, par exemple X_t peut être la position et le mouvement d'un satellite à l'instant t. L'équation décrivant l'évolution du satellite ne peut pas être déterministe à cause des nombreux paramètres inconnus. On ajoute donc un terme de bruit (aléatoire) de la forme $\sigma(X_t)dB_t$ où B_t est un mouvement Brownien et $\sigma(.)$ représente l'intensité du bruit dépendant de l'état du système physique à l'instant t. On arrive donc à une *équation différentielle stochastique* (abréviation : E.D.S.) de la forme suivante

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

L'intégrale de Itô introduite dans les chapitres précédents permet de donner un sens mathématique à cette équation sous la forme intégrale suivante

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s. \tag{8.1}$$

Remarquons qu'on a déjà rencontré une équation différentielle stochastique (linéaire) :

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s \; dB_s$$

dont la solution est

$$X_t = \exp\Big(B_t - \frac{t}{2}\Big).$$

Plus généralement, l'équation

$$X_t = x_0 + a\int_0^t X_s \; dB_s + b\int_0^t X_s \; ds, \quad (x_0, a, b \in \mathbb{R})$$

a pour solution le processus stochastique

$$X_t = x_0 \exp\Big(aB_t + (b - \frac{a^2}{2})t\Big).$$

La solution d'une E.D.S. n'est pas en général aussi simple à déterminer. C'est pourquoi il existe des conditions sur les fonctions b et σ qui assurent l'existence et l'unicité de la solution de l'E.D.S. (8.1). C'est ce que nous nous proposons de décrire dans la suite de ce chapitre. Pour être complétement général, on autorise b et σ à dépendre du temps t. On étudie donc l'E.D.S. suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s. \tag{8.2}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien. On se donne un intervalle $[0, T]$ et $s \in [0, T]$. On pose

$$\mathcal{F}_{s,t} = \sigma(B_u - B_s; s \le u \le t).$$

Alors , $(X_t^x)_{t\in[s,T]}$ est solution de l'E.D.S. :

$$X_t^x = x + \int_s^t b(r, X_r^x)\ dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^x) dB_r \tag{8.3}$$

si X_t^x est $\mathcal{F}_{s,t}$-mesurable pour tout $t \in [s, T]$ et satisfait (8.3).
Hypothèses :
(H_1) *: Condition de Lipschitz :*
Il existe $L > 0$ telle que

$$|b(t, y) - b(t, x)| \le L|x - y|$$

$$|\sigma(t, y) - \sigma(t, x)| \le L|x - y|$$

pour tout $t \in [0, T]$.
(H_2) *:* Les fonctions $t \to b(t, x)$ et $t \to \sigma(t, x)$ sont continues pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe $A > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$,

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \le A(1 + |x|).$$

Théorème 8.0.6. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2)*, l'équation différentielle stochastique* (8.2) *admet une unique solution pour toute condition initiale* x *appartenant à* L^p*, pour tout* $p \ge 2$.

Démonstration. i) Existence d'une solution de (8.2) *:*
On utilise la méthode des aproximations successives :

$$X_t^{(0)} = x, X_t^{(1)} = x + \int_s^t b(r, x)\ dr + \int_s^t \sigma(r, x) dB_r,$$

$$\dots$$

$$X_t^{(n)} = x + \int_s^t b(r, X_r^{(n-1)})\ dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{(n-1)}) dB_r.$$

On a donc

$$X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} = \int_s^t \left[b(r, X_r^{(n)}) - b(r, X_r^{(n-1)})\right]\ dr + \int_s^t \left[\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)})\right]\ dB_r.$$

Posons

$$\alpha_t^{(n)} = \mathbb{E}\left(\sup_{s \le u \le t} |X_u^{(n+1)} - X_u^{(n)}|^p\right)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \alpha_t^{(n)} &\le 2^p \left[\mathbb{E}\left(\sup_{s \le u \le t} \left|\int_s^u \left(b(r, X_r^{(n)}) - b(r, X_r^{(n-1)})\right)\ dr\right|^p\right)\right. \\ &+ \left.\mathbb{E}\left(\sup_{s \le u \le t} \left|\int_s^u \left(\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)})\right)\ dB_r\right|^p\right)\right]. \end{aligned}$$

Notons

$$\Sigma_1(n) = \mathbb{E}\left(\sup_{s \le u \le t} \left|\int_s^u \left(b(r, X_r^{(n)}) - b(r, X_r^{(n-1)})\right)\ dr\right|^p\right)$$

et

$$\Sigma_2(n) = \mathbb{E}\left(\sup_{s \le u \le t} \left|\int_s^u \left(\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)})\right)\ dB_r\right|^p\right).$$

En utilisant l'inégalité de Burkholder, on peut majorer $\Sigma_2(n)$ par

$$\Sigma_2(n) \le C_p\ \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \left(\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)})\right)^2\ dr\right)^{p/2}\right].$$

Nous allons maintenant utiliser le résultat suivant :
soit f une fonction positive, alors

$$\left(\int_s^t f(r)\ dr\right)^{p/2} \le (t-s)^{p/2-1} \int_s^t f(r)^{p/2}\ dr.$$

Alors,

$$\Sigma_2(n) \le C_p\ (t-s)^{p/2-1}\ \int_s^t \mathbb{E}\left[\left|\sigma(r, X_r^{(n)}) - \sigma(r, X_r^{(n-1)})\right|^p\right]\ dr.$$

$$\le C_p\ L^p (t-s)^{p/2-1}\ \int_s^t \mathbb{E}\left[\left|X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}\right|^p\right]\ dr$$

en utilisant l'hypothèse (H_1). Par conséquent, il existe une constante k_2 telle que

$$\Sigma_2(n) \le k_2 \int_s^t \mathbb{E}\left[\sup_{s \le u \le r} \left|X_u^{(n)} - X_u^{(n-1)}\right|^p\right]\ dr.$$

En utilisant les mêmes types d'argument, on montre qu'il existe une constante k_1 telle que

$$\Sigma_1(n) \leq k_1 \int_s^t \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq u\leq r} \left|X_u^{(n)} - X_u^{(n-1)}\right|^p\right] \, dr.$$

On en déduit donc qu'il existe une constante K telle que

$$\alpha_t^{(n)} \leq K \int_s^t \alpha_r^{(n-1)} \, dr.$$

Par récurrence descendante,

$$\begin{aligned}
\alpha_t^{(n)} &\leq K^n \alpha_t^{(0)} \int_s^t \, dt_1 \int_s^{t_1} \, dt_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} \, dt_r \\
&\leq \frac{K^n}{n!} \alpha_t^{(0)} (t-s)^n \leq \frac{K^n}{n!} \alpha_t^{(0)} T^n
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\alpha_t^{(0)} &= \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq u\leq t} \left|\int_s^u b(r,x) \, dr + \int_s^u \sigma(r,x) \, dB_r\right|^p\right] \\
&\leq 2^p \left(\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq u\leq t} \left|\int_s^u b(r,x) \, dr\right|^p\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq u\leq t} \left|\int_s^u \sigma(r,x) \, dB_r\right|^p\right]\right) \\
&\leq 2^p \left((t-s)^{p-1} \mathbb{E}\Big(\int_s^t |b(r,x)|^p \, dr\Big) + (t-s)^{p/2-1} \mathbb{E}\Big(\int_s^t |\sigma(r,x)|^p \, dr\Big)\right) \\
&\leq K A^p \mathbb{E}\Big((1+|x|)^p\Big) = C < \infty
\end{aligned}$$

par hypothèse. Donc,

$$\alpha_t^{(n)} \leq C \, \frac{(KT)^n}{n!}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq u\leq t} |X_u^{(n+1)} - X_u^{(n)}|^p\right]\right)^{1/p} \leq C^{1/p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(KT)^n}{n!}\right)^{1/p} < \infty$$

Donc, $(X_u^{(n)})$ est une suite uniformément de Cauchy dans L^p. Par conséquent, la limite existe et appartient à L^p.

ii) Unicité de la solution :
Soit X et X' deux solutions de l'E.D.S. (8.2) définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$. Alors, on montre que X et X' sont indistinguables au sens où

$$\mathbb{P}[\exists u \in]s,t]; X_u \neq X'_u] = 0,$$

en utilisant le lemme de Gronwall :
soit g une fonction borélienne définie sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\sup_{t\leq T} g(t) < \infty.$$

Si

$$g(t) \leq A + B\int_0^t g(s)\,ds,$$

alors pour tout $t \in [0,T]$,

$$g(t) \leq A\exp(Bt).$$

En particulier, si $A = 0$, alors $g(t) = 0$.
Considérons $T_n = \inf\{t;\ |X_t| = n \text{ ou } |X'_t| = n\}$. Alors, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T_n]$,

$$\mathbb{E}(|X_t - X'_t|^2) \leq K\ \mathbb{E}(\int_s^t |X_r - X'_r|^2\,dr).$$

Le processus X est donc une modification sur $[0,T_n]$ de X' donc sur $\mathbb{R}^+$ ($T_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{P}-$p.s.), ce qui entraîne l'indistinguabilité de X et de X' par continuité. □

Démonstration du lemme de Gronwall.
En itérant la condition sur la fonction g, on a pour tout $n \geq 1$,

$$g(t) \leq A + A(Bt) + A\frac{(Bt)^2}{2} + \ldots + A\frac{(Bt)^n}{n!} + B^{n+1}\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \ldots \int_0^{s_n} ds_{n+1} g(s_{n+1}).$$

Si g est majorée par une constante C, le dernier terme ci-dessus est majoré par $C(Bt)^{n+1}/(n+1)!$, donc tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Le lemme en découle. □

Quelques références bibliographiques :

1- **K.L. Chung, R.J. Williams** Introduction to stochastic integration. Birkhäuser, 1990.

2- **I. Karatzas, S. Shreve** Brownian motion and stochastic calculus. Springer, 1987.

3- **D. Revuz, M. Yor** Continuous martingales and Brownian motion. Springer, 1991.

et aussi un livre écrit en français avec des exercices corrigés :

4- **F. Comets, T. Meyre** Calcul stochastique et modèles de diffusions. Cours et exercices corrigés. Dunod, Paris, 2006.