L3 Math-Éco. Probabilités - Statistiques

Nadine GUILLOTIN-PLANTARD

13 septembre 2018

Table des matières

Chapitre 1

Vocabulaire et concepts probabilistes

1.1 Espace de probabilité.

Définition 1.1.1. *Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu*[1] *sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité c'est à dire une mesure positive*[2] *telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.*

Exemple 1 : En prenant $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (ensemble des parties de Ω), et $\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\{1\}) = p$, $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ où $0 \leq p \leq 1$, on obtient un espace de probabilité.
Exemple 2 : En prenant $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P} = \delta_a, a \in \mathbb{R}$, l'application qui à toute partie A de $\mathbb{R}$ associe

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(appelée Masse de Dirac au point a), on obtient encore un espace de probabilité.
On déduit facilement de la définition les deux propriétés suivantes.

---

1. **Rappels :**

Définition 1.1.2. *Une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est un ensemble de sous-ensembles de Ω qui vérifie*
- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- *$\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire ($A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$).*
- *$\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable ($\forall n, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{F}$).*

2.

Définition 1.1.3. *Une mesure positive μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie*
- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ disjointe, $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.*

Proposition 1.1.1. — *Si deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont* **incompatibles** *(ou* **disjoints***), i.e. $A \cap B = \emptyset$, alors*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

—

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

où A^c désigne l'événement complémentaire de A (parfois aussi noté $\overline{A}$).

1.2 Variables aléatoires

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1. *Une variable aléatoire (en abrégé v.a.) X sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est une fonction mesurable*[3] *de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$. La loi de la variable X est donnée par la "mesure image" $\mathbb{P}_X$ définie par*

$$\forall B \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \overset{notation}{=} \mathbb{P}(X \in B).$$

Exercice : Montrer que $\mathbb{P}_X$ est bien une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.
Exemple : Prenons $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ la loi uniforme sur Ω (i.e. $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/6$ pout tout $i \in \Omega$). L'application X définie sur Ω qui à $\omega \in \Omega$ associe 1 si ω est pair et 0 sinon est une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}_X(\{0\}) = 1/2$.
Remarque : Souvent $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sera "abstrait" ; on s'intéresse aux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, leur loi, leur dépendance,...

1.2.2 Cas des variables aléatoires discrètes

Définition 1.2.3. *Lorsque E est discret, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, on dit que X est une variable aléatoire discrète.*

Proposition 1.2.1. *Dans ce cas, $\mathbb{P}_X$ est définie par $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ et*

$$\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x)\delta_x.$$

Pour tout $B \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}_X(B) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x).$$

3.

Définition 1.2.2. *Une fonction f de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$ est dite mesurable si $\forall B \in \mathcal{E}, f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.*

Exemples de lois discrètes :

— Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Cette loi permet de modéliser une variable binaire (Pile ou Face, présence ou absence de maladie, caractère fumeur ou non, ...). Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle est à valeurs dans $\{0,1\}$, et vérifie

$$\mathbb{P}(X=1)=p, \quad \mathbb{P}(X=0)=1-p.$$

On parle souvent d'une "suite d'épreuves de Bernoulli" ou d'un "schéma de Bernoulli" pour désigner une suite de variables aléatoires de Bernoulli, de "succès" pour $X=1$, et d'"échec" pour $X=0$.

— Loi Binomiale $\mathcal{B}in(N,p)$

Cette loi permet de modéliser le nombre de succès lors d'une suite de N épreuves de Bernoulli indépendantes. Une variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres N,p si elle est à valeurs dans $\{0,\cdots,N\}$, et vérifie

$$\forall k \in \{0,\cdots,N\}, \mathbb{P}(X=k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}.$$

— Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Cette loi apparaît naturellement comme limite de la loi Binomiale, quand le nombre d'épreuves tend vers l'infini, à espérance constante. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Cette loi permet de modéliser le nombre d'événements ponctuels arrivant durant une certaine durée, ou dans une certaine zone spatiale, lorsqu'il y a stationnarité et indépendance des arrivées.

— Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$

Une variable aléatoire X suit une loi Géométrique de paramètre p si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^{\star}$ [4]*, et vérifie*

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\star}, \mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}.$$

Cette loi modélise l'instant du premier succès lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

1.2.3 Cas des variables aléatoires réelles

Définition 1.2.4. *Si $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on dit que X est une variable aléatoire réelle. On dit que X est une variable aléatoire à densité si il existe*

4. Certains peuvent la définir dans $\mathbb{N}$, en considérant $X-1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *telle que pour tout* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Exemples de lois continues :

— Loi exponentielle notée $\mathcal{E}(\lambda)$
Une variable aléatoire X *suit une loi exponentielle de paramètre* λ *si elle est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *et si elle a pour densité la fonction définie par*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

— Loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
Une variable aléatoire X *suit une loi Normale (ou gaussienne) de paramètres* m *et* σ *si elle est à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *et a pour densité la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Cette loi est importante et apparaît notamment dans le théorème central limite qu'on verra plus tard dans ce cours.

— Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$
Une variable aléatoire X *suit une loi uniforme sur* $[a,b]$ *si elle est à valeurs dans* $[a,b]$, *et a pour densité la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

1.3 Espérance

1.3.1 Définition

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

Définition 1.3.1. *1. (Espérance d'une fonction positive) Soit* $g : E \to \mathbb{R}_+$ *mesurable (positive !). On appelle espérance de* $g(X)$ *le réel*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega).$$

2. Si $g : E \to \mathbb{R}$ *est mesurable telle que* $\mathbb{E}[|g(X)|] < +\infty$, *alors*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega).$$

Nous allons maintenant voir une propriété fondamentale qui permet de passer de l'intégration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à celle sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Proposition 1.3.1. *(Formule de transfert) Si $g : E \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x).$$

Si $g : E \to \mathbb{R}$ est mesurable telle que $\mathbb{E}[|g(X)|] < +\infty$, alors

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x).$$

En particulier, lorsque X est une v.a. discrète (par exemple $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \ldots$), cela devient

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x\in E} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Si X est une v.a. réelle, de densité f, alors on a

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

1.3.2 Propriétés de l'espérance

Nous listons ici quelques propriétés fondamentales de l'espérance.

Proposition 1.3.2.

1. *(linéarité) Pour tout réel λ, μ,*

$$\mathbb{E}[\lambda f(X) + \mu g(Y)] = \lambda\mathbb{E}[f(X)] + \mu\mathbb{E}[g(Y)].$$

2. *(croissance) Si $f(X) \leq g(Y)$ p.s., alors $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$.*
3. *(Inégalité de Jensen) Soit f une fonction convexe. Alors, on a*

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

En particulier,

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|].$$

1.3.3 Moments, variance, inégalités

Soit X une v.a. réelle.

Définition 1.3.2. *Le moment d'ordre r de X est défini lorsque $\mathbb{E}[|X|^r] < +\infty$ par*

$$m_r = \mathbb{E}[X^r] := \int_{\Omega} X(\omega)^r\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} t^r\mathbb{P}_X(dt).$$

Proposition 1.3.3. *Soit $p \geq q$ alors*

$$\mathbb{E}[|X|^q]^{1/q} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}.$$

Remarque : En particulier,

$$\mathbb{E}[|X|] \leq \mathbb{E}[X^2]^{1/2}.$$

On en déduit qu'une v.a. de carré intégrable est intégrable.

Définition 1.3.3. *Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on peut définir la variance de X par*

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

On définit aussi l'écart-type de X par $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Remarque : L'espérance d'une variable aléatoire donne la valeur moyenne (au sens probabiliste) de la variable aléatoire. Sa variance mesure la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de sa moyenne.

Théorème 1.3.1. *(Inégalité de Markov) Si $X \geq 0$ et $a > 0$, alors*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[X].$$

(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{1}{a^2}\mathrm{Var}(X).$$

1.4 Fonctions associées à une variable aléatoire

1.4.1 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit sa fonction de répartition par la formule

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Par la propriété de continuité des mesures de probabilités par réunion croissante et intersection décroissante, on déduit que F_X est une fonction croissante, continue à droite. Plus précisément, la limite à gauche de F_X en un point $x \in \mathbb{R}$, notée $F_X(x-)$, est donnée par

$$F_X(x-) = \mathbb{P}(X < x).$$

ou autrement dit,

$$F_X(x) - F_X(x-) = \mathbb{P}(X = x).$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X caractérise sa loi.

Proposition 1.4.1. *Soit X et X' deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $F_X = F_{X'}$. Alors X et X' ont la même loi.*

Noter que, dans l'énoncé précédent, comme dans ceux, similaires, qui sont à venir dans ce chapitre, on ne suppose pas que X et X' sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
La fonction de répartition F_X est un outil pratique pour calculer des moments.
Exercice : Soit X une variable aléatoire positive, et $p \in [1, +\infty[$, alors

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^{+\infty} p x^{p-1} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx.$$

1.4.2 Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction caractéristique de X est définie par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], t \in \mathbb{R}.$$

Par la formule de transfert, ceci n'est autre que

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathbb{P}_X(dx).$$

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire caractérise la loi de cette variable.

Proposition 1.4.2. *Soit X et X' deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\phi_X = \phi_{X'}$. Alors X et X' ont même loi.*

Remarque : $\phi_X = \phi_{X'}$ signifie que $\phi_X(t) = \phi_{X'}(t)$ pour **tout** $t \in \mathbb{R}$.

Une liste des fonctions caractéristiques des lois usuelles est donnée à la fin du polycopié. Notamment, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$\phi_X(t) = e^{-t^2/2}.$$

Chapitre 2

Indépendance

Dans tout ce chapitre, on fixe l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.1 Probabilités conditionnelles élémentaires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $B \in \mathcal{F}$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On définit alors, pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

et on l'appelle probabilité de A sachant B. Comme $\mathbb{P}(\Omega|B) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$, on obtient que l'application $A \to \mathbb{P}(A|B)$ est une mesure de probabilités. Intuitivement, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cdot|B))$ est l'espace correspondant à une expérience aléatoire pour laquelle on sait a priori que l'événement B est réalisé. Si A et B sont tous deux des événements tels que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$, alors on obtient facilement *la formule de Bayes*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Soit I un ensemble d'indices fini ou dénombrable. Si $(B_i, i \in I)$ est une partition mesurable de Ω, c'est-à-dire que les ensembles B_i sont des événements deux-à-deux disjoints et de réunion Ω, alors pour tout événement A, on a *la formule des probabilités totales*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

où l'on pose par convention $\mathbb{P}(A|B_i) = 0$ si $\mathbb{P}(B_i) = 0$. À l'aide de cette formule, on peut réécrire la formule de Bayes sous la forme

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}.$$

2.2 Indépendance d'événements

Soit $A, B \in \mathcal{F}$ deux événements. On dit que A et B sont *indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Autrement dit, si de plus $\mathbb{P}(B) > 0$, ceci signifie que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, c'est-à-dire que l'information donnée par B n'a aucune influence sur la probabilité que A ait lieu. Plus généralement, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements, on dit qu'ils sont *indépendants dans leur ensemble* si pour tout $j_1, \ldots, j_k$,

$$\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}) = \mathbb{P}(A_{j_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{j_k}).$$

Remarques : • Si les événements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont indépendants, alors ils sont aussi indépendants deux-à-deux, mais la réciproque n'est pas vraie.
• Dans la définition, il ne suffit pas de vérifier $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n)$.
• Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements indépendants, alors $A_1^c, A_2, \ldots, A_n$ sont également indépendants (cf TD).

2.3 Indépendance de variables aléatoires

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, respectivement à valeurs dans les espaces mesurables $(E_i, \mathcal{E}_i), 1 \leq i \leq n$. On dit que ces variables aléatoires sont indépendantes si pour tout choix d'ensembles mesurables $A_i \in \mathcal{E}_i, 1 \leq i \leq n$, on a*

$$\mathbb{P}(X_i \in A_i, 1 \leq i \leq n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Dans le cas où les variables aléatoires $X_i, i = 1, \ldots, n$ sont indépendantes, la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ ou bien *la loi conjointe (ou jointe)* des variables aléatoires $X_i, i = 1 \ldots, n$ est connue et égale à la mesure produit [1] des $\mathbb{P}_{X_i}, i = 1, \ldots, n$. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, respectivement à valeurs dans les espaces mesurables $(E_i, \mathcal{E}_i), 1 \leq i \leq n$. Ces variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si la loi de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est la loi produit des marginales :*

$$\mathbb{P}_{(X_1, \ldots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \mathbb{P}_{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_{X_n}.$$

1. **Rappels :**

Définition 2.3.2. *Soit deux espaces de probabilités $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{Q})$. La mesure produit $\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}$ est une mesure sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ telle que*

$$\forall A \in \mathcal{F}_1, \forall B \in \mathcal{F}_2, \mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}(A \times B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{Q}(B).$$

La proposition suivante est très utile.

Proposition 2.3.2. *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, respectivement à valeurs dans un espace mesurable $(E_i, \mathcal{E}_i)$, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $f_i : E_i \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose, ou bien que toutes les fonctions f_i sont positives, ou bien que $f_i \in L^1(\mathbb{P}_{X_i})$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors*

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[f_i(X_i)\right].$$

En particulier, si $f_i \in L^1(\mathbb{P}_{X_i})$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i) \in L^1(\mathbb{P})$.

Par exemple, soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs réelles, intégrables, et indépendantes, alors $X_1 \dots X_n$ est aussi intégrable et

$$\mathbb{E}[X_1 \dots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \dots \mathbb{E}[X_n].$$

Remarque : Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et dans L^2. Alors les variables aléatoires $X - \mathbb{E}[X]$ et $Y - \mathbb{E}[Y]$ sont indépendantes et dans L^2, et l'on a

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = 0.$$

On dit que des variables aléatoires indépendantes sont décorrélées (de corrélation nulle). La réciproque n'est pas vraie. (cf TD)

2.3.2 Critères d'indépendance de variables aléatoires

Proposition 2.3.3. *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, à valeurs dans des ensembles $E_1, \dots, E_n$. Alors ces variables sont indépendantes si et seulement si l'on a, pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ dans $E_1 \times \dots \times E_n$*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

La preuve de ce résultat est évidente.

Proposition 2.3.4. *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors elles sont indépendantes si et seulement si l'on a, pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

2.4 Sommes de variables aléatoires indépendantes

Si l'on a une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes et de même loi (on abrège cela en i.i.d., pour "indépendantes et identiquement distribuées"), la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 0$$

est appelée *une marche aléatoire à pas i.i.d.* Notons que si l'on suppose que les variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_n$ sont de carré intégrable, alors

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

En particulier, si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont de plus indépendantes, on a

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Définition 2.4.1. *On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers X dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^2] = 0.$$

Proposition 2.4.1. [Loi faible $\mathbb{L}^2$ des grands nombres]. *Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, telles que $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$. Alors*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_1],$$

la convergence ayant lieu dans l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Démonstration. On constate simplement que, comme $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \ldots...$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n - \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n]}{n}\right|^2\right] \\
&= \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n} \mathrm{Var}(X_1)
\end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. □

On remarquera que l'on a utilisé uniquement le fait que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ ont même espérance et variance, et sont décorrélées, c'est-à-dire que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Comme on l'a vu, cette condition est plus faible que la condition i.i.d.

2.5 Lemmes de Borel-Cantelli

Si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite d'événements, on définit

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

qu'on peut voir comme l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité des événements A_n (pourquoi ?). De même, on pose

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

qui est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à tous les événements A_n, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. Les sous-ensembles $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ sont eux-mêmes des événements. Par ailleurs on a clairement

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n^c = \left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right)^c \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n^c = \left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)^c.$$

2.5.1 Le premier lemme de Borel-Cantelli

Le lemme de Borel-Cantelli est une observation simple mais extrêmement utile.

Lemme 2.5.1. *Soit $A_1, A_2, \ldots$ une suite d'événements. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0.$$

Démonstration. L'hypothèse stipule que $\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{A_n}\right] < +\infty$. Ceci implique que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n} < +\infty$ presque sûrement, c'est-à-dire que presque tout $\omega \in \Omega$ n'appartient qu'à un nombre fini des événements A_n. Autrement dit, $\mathbb{P}(\liminf_{n\to+\infty} A_n^c) = 1$, et on conclut en passant au complémentaire. □

Remarque : En pratique, si l'on cherche à montrer que des événements ont lieu à partir d'un certain rang, on estime donc les probabilités des complémentaires (A_n est donc un "mauvais" événement) et on essaie de montrer que ces probabilités sont petites (au sens où elles sont sommables).

2.5.2 Le second lemme de Borel-Cantelli et un exemple

Une hypothèse d'indépendance des événements A_n est nécessaire pour l'énoncé "réciproque" ci-dessous.

Lemme 2.5.2. *Soit $A_1, A_2, \ldots$ des événements indépendants. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 1.$$

Démonstration. Pour tout $k \geq 1$, on a par le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq k} A_n^c\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{n\geq k} \mathbf{1}_{A_n^c}\right] = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{n=k}^{N} \mathbf{1}_{A_n^c}\right] = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=k}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A_n^c}\right]$$

où l'on a utilisé l'indépendance à la dernière étape. Cette limite vaut

$$\prod_{n\geq k}(1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \exp\left(-\sum_{n\geq k} \mathbb{P}(A_n)\right) = 0,$$

où l'on a utilisé $1 - x \leq e^{-x}$, et l'hypothèse de divergence de $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\to+\infty} A_n^c) \leq \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq k} A_n^c\right) = 0$$

on conclut par passage au complémentaire. □

Exemple d'application :
Montrons que, dans une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie, la séquence **PFP** (Pile, Face) apparaît une infinité de fois. On note $(X_1, X_2, \ldots)$ la suite de variables aléatoires indépendantes décrivant les résultats de l'expérience aléatoire. Leur loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X_n = \mathbf{P}) = \mathbb{P}(X_n = \mathbf{F}) = \frac{1}{2}.$$

On définit les événements indépendants

$$A_{3n} = \{\omega \in \Omega; (X_{3n}(\omega), X_{3n+1}(\omega), X_{3n+2}(\omega)) = (\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{P})\}.$$

Clairement, en utilisant l'indépendance des X_n,

$$\mathbb{P}(A_{3n}) = \mathbb{P}(X_{3n} = \mathbf{P})\mathbb{P}(X_{3n+1} = \mathbf{F})\mathbb{P}(X_{3n+2} = \mathbf{P}) = 1/8.$$

Par conséquent, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_{3n}) = +\infty$ et d'après le second lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_{3n}) = 1,$$

c'est à dire que presque sûrement, la séquence **PFP** apparait une infinité de fois.

Chapitre 3

Loi des grands nombres

Dans le chapitre précédent, on a vu que si l'on considère une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. de carré intégrable, alors

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_1],$$

la convergence ayant lieu dans l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On s'intéresse dans ce chapitre à des versions plus fortes de ce résultat. Pour cela, on a besoin de définir différentes notions de convergence.

3.1 Différents modes de convergence

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle (définies sur le même espace de probabilité).

3.1.1 Convergence presque sûre

On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers X et on note $X_n \overset{p.s}{\to} X$ si

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big\}\Big) = 1.$$

Intuitivement, on a convergence ω par ω sauf sur un ensemble de mesure nulle.

3.1.2 Convergence dans $\mathbb{L}^p$

Soit $p \geq 1$. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers X dans $\mathbb{L}^p$ et on note $X_n \overset{\mathbb{L}^p}{\to} X$ si

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0.$$

3.1.3 Convergence en probabilité

On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Proposition 3.1.1. *Si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X presque sûrement ou dans $\mathbb{L}^p$ (pour un $p \geq 1$ donné), alors on a aussi convergence en probabilité.*

Démonstration. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X presque sûrement, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on utilise le théorème de convergence dominée dans

$$\mathbb{P}\Big(\Big|X_n - X\Big| > \varepsilon\Big) = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{|X_n - X|>\varepsilon}\Big]$$

l'indicatrice tendant vers 0 presque sûrement.
Si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X dans $\mathbb{L}^p$, on utilise l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right]}{\varepsilon^p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

3.2 Loi forte des grands nombres

On peut maintenant citer le premier théorème important de ce cours.

Théorème 3.2.1. **[Loi forte des grands nombres]** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$. Alors*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

Démonstration. La preuve de la loi forte des grands nombres est un peu compliquée, on va se contenter de prouver le résultat dans le cas $X_1 \in \mathbb{L}^2$, ce qui implique $X_1 \in \mathbb{L}^1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. On note S_n la somme $X_1 + \ldots + X_n$. On montre premièrement la convergence presque sûre de la suite extraite $(S_{k^2}/k^2)_{k\geq 1}$ vers 0. On a

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_{k^2}}{k^2}\right)^2\right] = \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}(X_1)$$

ce qui est sommable donc presque sûrement, $\sum_{k\geq 1} \frac{S_{k^2}}{k^2} < +\infty$ ce qui implique que presque sûrement la suite $(S_{k^2}/k^2)_{k\geq 1}$ converge vers 0.
Il nous faut maintenant contrôler S_n/n entre deux valeurs de la suite extraite. Pour cela, on définit pour $\varepsilon > 0$,

$$A_k = \left\{\omega \in \Omega; \max_{k^2 \leq n < (k+1)^2} |S_n(\omega) - S_{k^2}(\omega)| > \varepsilon k^2\right\}, \ k \geq 1.$$

Notons que par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &\leq \sum_{k^2 \leq n < (k+1)^2} \mathbb{P}\left(|S_n - S_{k^2}| > \varepsilon k^2\right) \\
&\leq \sum_{k^2 \leq n < (k+1)^2} \frac{\operatorname{Var}(S_n - S_{k^2})}{\varepsilon^2 k^4}
\end{aligned}$$

On a

$$S_n - S_{k^2} = X_{k^2+1} + X_{k^2+2} + \ldots + X_n$$

donc

$$\operatorname{Var}(S_n - S_{k^2}) = (n - k^2)\operatorname{Var}(X_1)$$

et donc

$$\mathbb{P}(A_k) \leq \frac{((k+1)^2 - k^2)^2}{\varepsilon^2 k^4}\operatorname{Var}(X_1) = \frac{(2k+1)^2}{\varepsilon^2 k^4}\operatorname{Var}(X_1).$$

Le majorant étant sommable en k, on en déduit d'après le lemme de Borel-Cantelli que, presque sûrement, pour tout k assez grand, on a

$$M_k = \max_{k^2 \leq n < (k+1)^2} |S_n - S_{k^2}| \leq \varepsilon k^2.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $k = k(n)$ l'unique entier tel que $k^2 \leq n < (k+1)^2$. On a alors

$$\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq \frac{k^2}{n}\left(\left|\frac{S_{k^2}}{k^2}\right| + \left|\frac{M_k}{k^2}\right|\right)$$

et donc presque sûrement,

$$\limsup_{n \to +\infty} \left|\frac{S_n}{n}\right| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout nombre rationnel $\varepsilon > 0$, on en déduit que S_n/n converge vers 0 presque sûrement. □

Chapitre 4

Théorème central limite

On a vu dans le chapitre précédent que si l'on se donne une suite de variables aléatoires i.i.d. $X_1, X_2, \ldots$ de carré intégrable alors S_n/n converge p.s. vers $\mathbb{E}[X_1]$. Il est naturel de se demander à quelle vitesse $(S_n/n) - \mathbb{E}[X_1]$ converge vers 0. Le fait que $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1)$ indique une vitesse en $\sqrt{n}$ comme on va le voir dans ce chapitre. Avant cela, nous avons besoin de définir la notion de convergence en loi.

4.1 Convergence en loi

Il s'agit ici du quatrième mode de convergence en théorie des probabilités.

Définition 4.1.1. *On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si pour toute fonction continue, bornée f,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)].$$

On le note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Remarque : La notion de convergence en loi de variables aléatoires est une propriété sur leur loi. Si X_n converge en loi vers X alors elle converge en loi vers n'importe quelle autre variable aléatoire X' de même loi que X.

La définition de la convergence en loi ne donne pas un outil pratique pour montrer qu'une suite de variables aléatoires converge en loi. On va donner ici deux critères (admis) de convergence en loi, le premier en terme de fonctions de répartition et le second en terme de fonctions caractéristiques.

Proposition 4.1.1. *La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$ pour tout x point de continuité de F_X.*

La convergence en loi peut aussi être formulée en terme de fonctions caractéristiques.

Théorème 4.1.1. [**Théorème de P. Lévy**] *La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_X(t).$$

Exemple : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telle que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in [0,1]$. Sous l'hypothèse $p_n \to \lambda$ quand n tend vers $+\infty$, on peut montrer que X_n converge en loi vers la loi de Bernoulli de paramètre λ.

Pour les variables aléatoires discrètes, on a un critère très simple de convergence en loi.

Théorème 4.1.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Alors, X_n converge en loi vers X si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{Z}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Exemple : Si X_n est une variable aléatoire suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ où $\lambda > 0$ est un paramètre, alors X_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

4.2 Théorème central limite

Théorème 4.2.1. *Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de carré intégrable. On suppose que $\sigma^2 = Var(X_1) > 0$. Soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Alors, on a*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0,1).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que les variables aléatoires X_i sont centrées. D'après le théorème de P. Lévy, il suffit de montrer la convergence des fonctions caractéristiques $\phi_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(.)$ vers la fonction caractéristique de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Sous l'hypothèse $X_1 \in \mathbb{L}^2$, on a par la formule de Taylor-Young,

$$\phi_{X_1}(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + o(t^2).$$

Calculons la fonction caractéristique de $S_n/\sigma\sqrt{n}$. Les variables aléatoires $X_i, i \geq 1$ étant indépendantes et de même loi, on a

$$\phi_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(t) = \mathbb{E}\left[e^{i(X_1+\ldots+X_n)t/\sigma\sqrt{n}}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{iX_it/\sigma\sqrt{n}}] = \phi_{X_1}(t/\sigma\sqrt{n})^n.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(t) &= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= e^{-t^2/2} + o(1). \end{aligned}$$

La fonction caractéristique étant à valeurs complexes, la dernière limite nécessite quelques explications (cf TD ou la page 137 du livre "Probabilité" de P. Barbe et M. Ledoux). $\square$

Chapitre 5

Tests statistiques

5.1 Tests de Student

Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a.i.i.d. vérifiant $\mathbb{E}[|X_1|^2] < +\infty$ (on a donc en particulier $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$). Rappelons le théorème central limite

Théorème 5.1.1. *Sous les conditions ci-dessus, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega; \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega) - nm}{\sigma\sqrt{n}} \in [a,b]\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

avec $a < b$, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.

Un cas particulièrement important est celui où les v.a. X_i suivent une loi Normale.

Théorème 5.1.2. *Supposons que X_1 suit une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega; \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega) - nm}{\sigma\sqrt{n}} \in [a,b]\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \tag{5.1}$$

avec $a < b$.

Considérons maintenant un échantillon aléatoire $x_1, \ldots, x_n$ relevant d'une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ce qui signifie qu'il s'identifie à une réalisation $x_1 = X_1(\omega), \ldots, x_n = X_n(\omega), \omega \in \Omega$. Supposons encore que la moyenne m est inconnue. En vertu de la loi forte des grands nombres,

$$\frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n} \to m = \mathbb{E}[X_1]$$

et donc $\overline{m} = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ fournit une approximation de m. Peut-on estimer l'erreur $|m - \overline{m}|$? Pour cela, notons que (5.1) peut encore s'écrire sous la forme

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega; \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n} \in \left[m + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \tag{5.2}$$

et en particulier

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega; \frac{X_1(\omega)+\ldots+X_n(\omega)}{n} \in \left[m-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}dx \tag{5.3}$$

avec $a > 0$. Fixons $a > 0$ de sorte que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}dx = 1-\alpha,$$

alors ce résultat théorique s'interprète en pratique en considérant que

$$\overline{m} = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \in \left[m-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\iff m \in \left[\overline{m}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{m}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

avec une probabilité $p = 1-\alpha$. Ainsi, $\left[\overline{m}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{m}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est l'intervalle de confiance de la moyenne m de niveau $1-\alpha$ (ou avec un facteur de risque α). En particulier, avec le choix $1-\alpha = 0,95$, on a $a = 2$ et avec le choix $1-\alpha = 0,99$, on a $a = 2,6$.

Application 1 :
On suppose que l'on sache que le phénomène observé relève d'une loi Normale et que l'on connaisse $\sigma^2 > 0$. Alors, avec une probabilité $p = 0,95$, la moyenne (inconnue) m appartient à l'intervalle de confiance $\left[\overline{m}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{m}+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Application 2 :
Supposons que l'on veuille vérifier que le phénomène observé relève d'une loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On calcule $\overline{m}$ et on regarde si $\overline{m} \in \left[m-2,6\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m+2,6\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Si cela n'est pas le cas (ce qui ne peut se produire qu'avec une probabilité $p = 0,01$), alors on rejette l'hypothèse.

Supposons maintenant que $x_1,\ldots,x_n$ relève d'une loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, les deux paramètres m et σ^2 étant inconnus. Pour estimer la moyenne m, on fait appel au théorème suivant :

Théorème 5.1.3 (Test de Student). *Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On note*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

puis

$$t_{n-1} = \frac{(\overline{X}-m)\sqrt{n-1}}{\sqrt{S}}.$$

Alors, pour tout réel $a < b$,

$$\mathbb{P}(t_{n-1} \in [a, b]) = \int_a^b f_{n-1}(x)dx$$

où

$$f_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-n/2}.$$

La fonction Γ désigne ici la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Posons $\overline{m} = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ et $\overline{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{m})^2$. En procédant comme ci-dessus, on voit que

$$m \in \left[\overline{m} - a\sqrt{\frac{\overline{\sigma}}{n-1}}, \overline{m} + a\sqrt{\frac{\overline{\sigma}}{n-1}}\right]$$

avec une probabilité

$$p_a = \int_{-a}^{a} f_{n-1}(x)dx = 2\left\{\int_{-\infty}^{a} f_{n-1}(x)dx - \frac{1}{2}\right\}.$$

En prenant $a > 0$ de sorte que $p_a = 1 - \alpha$,

$$\left[\overline{m} - a\sqrt{\frac{\overline{\sigma}}{n-1}}, \overline{m} + a\sqrt{\frac{\overline{\sigma}}{n-1}}\right]$$

est l'intervalle de confiance de m de niveau $1 - \alpha$.

Application 3 :
Supposons que l'on sache que le phénomène relève d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne m connue. On procède à une série de 20 mesures $x_1, \ldots, x_{20}$ pour voir si le phénomène s'est modifié. Alors, si

$$\overline{m} \notin \left[m - 2,861\sqrt{\frac{\overline{\sigma}}{n-1}}, m + 2,861\sqrt{\frac{\overline{\sigma}}{n-1}}\right],$$

on a 99 % de chance pour que la loi soit modifiée.

Comparaison de deux moyennes : On dispose de deux échantillons indépendants $x_1, \ldots, x_{n_1}$ et $y_1, \ldots, y_{n_2}$ relevant de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$. Les trois paramètres m_1, m_2, σ^2 sont inconnus. On désire estimer $m_1 - m_2$.

Théorème 5.1.4 (Test de Fisher). *Soit $(X_n)_{n\geq 1}, (Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes telles que :*
(i) $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$.
(ii) $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$.
On note

$$\overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$$

et

$$S_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2, S_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2.$$

Puis,

$$U = (\overline{X} - \overline{Y} - (m_1 - m_2)) \Big/ \sqrt{\frac{n_1 S_1 + n_2 S_2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

Alors, pour tout réel $a < b$,

$$\mathbb{P}(U \in [a, b]) = \mathbb{P}(t_{n_1+n_2-2} \in [a, b]).$$

Application 4 : On fixe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(t_{n_1+n_2-2} \in [-a, a]) = 1 - \alpha$. Alors,

$$\overline{m_1} - \overline{m}_2 \in \left[m_1 - m_2 - a\sqrt{\frac{n_1\overline{\sigma}_1 + n_2\overline{\sigma}_2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)},\right.$$

$$\left. m_1 - m_2 + a\sqrt{\frac{n_1\overline{\sigma}_1 + n_2\overline{\sigma}_2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right]$$

avec une probabilité $p = 1-\alpha$. En particulier, si on dispose de deux échantillons indépendants $x_1, \ldots, x_{n_1}$ et $y_1, \ldots, y_{n_2}$ relevant respectivement de lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$ et si l'on souhaite tester l'hypothèse $m_1 = m_2$ alors on doit avoir, avec une probabilité $p = 1 - \alpha$,

$$|\overline{m_1} - \overline{m}_2| \leq a\sqrt{\frac{n_1\overline{\sigma}_1 + n_2\overline{\sigma}_2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}.$$

On regarde donc si cette majoration est satisfaite.

Comparaison de deux variances : On dispose de deux échantillons indépendants $x_1, \ldots, x_{n_1}$ et $y_1, \ldots, y_{n_2}$ relevant de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. On souhaite vérifier si $\sigma_1 = \sigma_2$.

Théorème 5.1.5. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}, (Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes telles que :*
(i) $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$.
(ii) $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$.
On pose

$$F_{n_1-1,n_2-1} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}S_1}{\frac{n_2}{n_2-1}S_2}.$$

Alors, F_{n_1-1,n_2-1} suit une loi de Fisher-Snedecor.

Application : On fixe $a > 0$ de sorte que

$$\mathbb{P}(F_{n_1-1,n_2-1} \leq a) = 1 - \alpha.$$

Si $\sigma_1 = \sigma_2$, alors on doit avoir

$$\frac{\frac{n_1}{n_1-1}\bar{\sigma}_1}{\frac{n_2}{n_2-1}\bar{\sigma}_2} \leq a$$

avec une probabilité $1 - \alpha$. On regarde donc si cette majoration est vérifiée. En pratique, on met au numérateur la plus grande des deux valeurs $\frac{n_1}{n_1-1}\bar{\sigma}_1$, $\frac{n_2}{n_2-1}\bar{\sigma}_2$.

Comparaison de deux échantillons gaussiens : On dispose de deux échantillons indépendants $x_1, \ldots, x_{n_1}$ et $y_1, \ldots, y_{n_2}$ relevant de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. On souhaite vérifier (au facteur de risque α près) que $m_1 = m_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2$. On procède comme suit. On commence par appliquer le test de Fisher-Snedecor de comparaison de deux variances. Si la réponse est positive ($\sigma_1 = \sigma_2$ au niveau $1 - \alpha$), alors on applique le test de Student de comparaison de deux moyennes (au même niveau).

5.2 Tests du χ^2

Définition 5.2.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

La v.a. Y suit la loi du Chi ("khi") deux à n degrés de liberté et admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Intervalle de confiance d'une variance : Un échantillon relève d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, m et σ^2 étant inconnus. On souhaite estimer σ^2.

Théorème 5.2.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On pose*

$$Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Alors,

$$\mathbb{P}(Y \in [a,b]) = \mathbb{P}(\chi^2_{n-1} \in [a,b]).$$

Application : Soit $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que

$$\mathbb{P}(\chi^2_{n-1} \leq \alpha_2) = \mathbb{P}(\chi^2_{n-1} \geq \alpha_1) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

et donc $\mathbb{P}(\chi^2_{n-1} \in [\alpha_1, \alpha_2]) = 1 - \alpha$. On a alors

$$\overline{\sigma} \in \left[\frac{\alpha_1 \sigma^2}{n}, \frac{\alpha_2 \sigma^2}{n}\right] \iff \sigma^2 \in \left[\frac{n\overline{\sigma}}{\alpha_2}, \frac{n\overline{\sigma}}{\alpha_1}\right]$$

avec une probabilité $p = 1 - \alpha$. Ainsi, $\left[\frac{n\overline{\sigma}}{\alpha_2}, \frac{n\overline{\sigma}}{\alpha_1}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 de niveau $1 - \alpha$.

Test de l'indépendance du χ^2. Dans une entreprise, on a dénombré 5300 cas d'absence (dans l'année) se répartissant comme suit

	maladie	*autre*
H	1800	1700
F	1200	600

Peut-on conclure que l'absentéisme, dû à d'autres causes que la maladie, est plus important chez les hommes ?

Théorème 5.2.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes telles que*
(i) $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. discrètes telle que

$$\mathbb{P}(X_1 = \alpha_i) = p_i > 0, i = 1, \ldots, N, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

(ii) $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. discrètes telle que

$$\mathbb{P}(Y_1 = \beta_i) = q_i > 0, i = 1, \ldots, M, \sum_{i=1}^{M} q_i = 1.$$

On pose

$$n_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \mathbf{1}_{\alpha_i}(X_p)\mathbf{1}_{\beta_j}(Y_p),$$

$$n_i = \sum_{p=1}^{n} \mathbf{1}_{\alpha_i}(X_p) \quad \text{et } n'_j = \sum_{p=1}^{n} \mathbf{1}_{\beta_j}(Y_p)$$

Alors,

$$D = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \left(n_{ij} - \frac{n_i n'_j}{n}\right)^2 \Big/ \frac{n_i n'_j}{n}.$$

converge en loi vers la loi $\chi^2_{(N-1)(M-1)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En vertu de la loi forte des grands nombres, on a les convergences presque sûres suivantes

$$\frac{n_{ij}}{n} \to \mathbb{P}(X_1 = \alpha_i; Y_1 = \beta_j)$$

$$\frac{n_i}{n} \to \mathbb{P}(X_1 = \alpha_i) \quad \text{et} \quad \frac{n'_j}{n} \to \mathbb{P}(Y_1 = \beta_j).$$

On a donc pour n grand,

$$n_{ij} \sim \frac{1}{n} n_i n'_j.$$

Le test du χ^2 nous sert à estimer l'écart entre ces deux équivalents.
Ce résultat théorique s'exploite de la manière suivante. On considère deux caractères A et B pouvant prendre des valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ et $\beta_1, \ldots, \beta_M$. Soit par ailleurs $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ un échantillon de mesures qu'on assimile à des réalisations $\overline{x}_1 = (X_1(\omega), Y_1(\omega)), \ldots, \overline{x}_n = (X_n(\omega), Y_n(\omega))$. On désigne par n_{ij} le nombre de mesures présentant les caractères (α_i, β_j), par n_i le nombre de mesures présentant le caractère α_i et par n'_j ceux faisant apparaitre β_j. On pose

$$D = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left(n_{ij} - \frac{n_i n'_j}{n} \right)^2 \Big/ \frac{n_i n'_j}{n}.$$

Soit $a > 0$ de sorte que

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{(N-1)(M-1)} \leq a\right) = 1 - \alpha.$$

Alors, si $D \ll a$, tout va bien et si $D > a$, on rejette l'hypothèse d'indépendance (avec un facteur de risque α).

Test du χ^2 de Pearson (Test d'ajustement) Soit $x_1, \ldots, x_N$ un échantillon aléatoire, c'est à dire (on le rappelle !) un relevé de N mesures relatives à un phénomène aléatoire.
Exemple 1 : On teste la durée de vie d'un système de guidage. A cet effet, on procède à 10 essais. On désigne par $x_i, i = 1, \ldots, 10$ le nombre d'heures de fonctionnement du système précédant l'apparition d'une anomalie. On a relevé :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	93	4	151	268	5	827	840	200	1050

Exemple 2 : On teste le nombre de pièces à rebuter dans des lots de fabrication, chaque lot comportant 100 pièces. On a répertorié 52 lots. On désigne par $x_i, i = 1, \ldots, 52$ le nombre de pièces à rebuter dans chaque lot, puis par

$$a_n = \text{card}\{i \in \{1, \ldots, 52\}; x_i = n\}, n \in \mathbb{N}$$

le nombre de lots comportant n pièces à rebuter. On a obtenu

n	0	1	2	3	4	5
a_n	18	18	8	5	2	1

Nous allons voir que ces mesures peuvent relever de lois statistiques sous-jacentes.

Définition 5.2.2. *On dit qu'un échantillon aléatoire $x_1, \dots, x_N$ relève d'une loi discrète $\{a_n, n \in I\}$, $\{\alpha_n, n \in I\}$(respectivement d'une loi absolument continue f) s'il correspond à une réalisation d'une suite $X_1, \dots, X_N$ de v.a.i.i.d. associée à cette loi, c'est à dire si :*

1. $x_1 = X_1(\omega), \dots, x_N = X_N(\omega)$ *pour un certain* $\omega \in \Omega$.
2. $X_1(\Omega) = \{a_n, n \in I\}, \mathbb{P}(X_1 = a_n) = \alpha_n, n \in I$ *(respectivement* $\mathbb{P}(X_1 \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx, \forall a < b$*).*

Fixons un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ puis notons

$$Y_n = \mathbf{1}_{[a,b]}(X_n), n \geq 1.$$

D'après la loi forte des grands nombres, sous de bonnes hypothèses sur les v.a. $X_n, n \geq 1$,

$$\frac{Y_1(\omega) + \ldots + Y_N(\omega)}{N} \underset{N \to +\infty}{\to} \mathbb{P}(X_1 \in [a,b]).$$

On en déduit que pour N "grand" le nombre

$$\mathrm{card}\{i \in \{1, \dots, N\}; x_i \in [a,b]\} = \sum_{i=1}^{N} Y_i(\omega)$$

fournit un équivalent de $N\mathbb{P}(X_1 \in [a,b])$.Pour vérifier donc que l'échantillon relève d'une loi (supposée) donnée, il est naturel de comparer, pour différents intervalles $[a,b]$, les effectifs empiriques $\mathrm{card}\{i \in \{1, \dots, N\}; x_i \in [a,b]\}$ aux effectifs théoriques $N\mathbb{P}(X_1 \in [a,b])$. Pour cela, on fait appel au théorème suivant :

Théorème 5.2.3. *Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a.i.i.d.. On fixe une partition $I_1, \dots, I_K$ de $X_1(\Omega)$ puis on note :*

$$D_N(\omega) = \sum_{n=1}^{K} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{I_n}(X_i(\omega)) - N\mathbb{P}(X_1 \in I_n)\right)^2}{N\mathbb{P}(X_1 \in I_n)}.$$

Alors, pour tout $x \geq 0$, fixé, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(D_N \leq x) = \mathbb{P}(\chi^2_{K-1} \leq x)$$

où χ^2_{K-1} est une v.a. suivant une loi du khi deux à $K-1$ degrés de liberté.

En pratique, on utilise ce résultat de la manière suivante :

1. On admet que pour N assez grand le nombre $\mathbb{P}(D_N \leq x)$ est égal à $\mathbb{P}(\chi^2_{K-1} \leq x)$.

2. On fixe un seuil de risque α petit ($\alpha = 0,05$ ou $0,1$) puis on relève sur la table statistique de χ^2_{K-1} le nombre x_α tel que

$$\mathbb{P}(\chi^2_{K-1} \leq x_\alpha) = 1 - \alpha.$$

3. On calcule à partir de l'échantillon $x_1, \ldots, x_N$ la distance empirique de Pearson :

$$\overline{D}_N = \sum_{n=1}^{K} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{I_n}(x_i) - N\mathbb{P}(X_1 \in I_n)\right)^2}{N\mathbb{P}(X_1 \in I_n)}$$

où X_1 suit la loi supposée.

4. On compare x_α à $\overline{D}_N$:
   - Si $\overline{D}_N \geq x_\alpha$ et si l'échantillon relève effectivement de la loi de X_1 alors $\overline{D}_N = D_N(\omega)$ pour un certain $\omega \in \Omega$. On sait par ailleurs que $\mathbb{P}(\omega; D_N(\omega) \geq x_\alpha) = \alpha$. Il y a donc $\alpha-$chance pour qu'il en soit ainsi. Comme α a été pris petit, on rejette l'hypothèse.
   - Si $\overline{D}_N \ll x_\alpha$, alors tout va bien.
   - Si $\overline{D}_N \sim x_\alpha$, alors on ne peut conclure positivement.

Exemples d'application : Tester l'hypothèse que les échantillons des exemples 1 et 2 relèvent respectivement d'une loi exponentielle et d'une loi de Poisson.

5.3 Test de Kolmogorov-Smirnov

On utilise ce test pour tester si un échantillon aléatoire $x_1, \ldots, x_N$ relève d'une loi donnée.

Théorème 5.3.1. *Soit $X_1, \ldots, X_N$ une suite de v.a.i.i.d.. On suppose que la fonction de répartition F est continue. On pose*

$$D_N = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{]-\infty,x]}(X_i)}{N} - F(x) \right).$$

La variable aléatoire $\sqrt{N} D_N$ converge en loi, vers une loi limite qui ne dépend pas de F et dont la fonction de répartition est donnée par

$$\forall t \geq 0, \quad F_{KS}(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2t^2).$$

En pratique, on utilise ce résultat de la manière suivante :

1. On réordonne la suite $x_1, \ldots, x_N$ en ordre croissant. Soit donc $x_{1,N} \leq x_{2,N} \leq \ldots \leq x_{N,N}$ la nouvelle suite ainsi obtenue.
2. On calcule

$$\overline{D}_N = \max_{1 \leq i \leq N} \max \left(\left| \frac{i}{N} - F(x_{i,N}) \right|, \left| F(x_{i,N}) - \frac{i-1}{N} \right| \right)$$

3. Sur la table statistique de Kolmogorov-Smirnov, on recherche le nombre a tel que
$$\mathbb{P}(D_N \leq a) = 0,9.$$
4. Si on a $\overline{D}_N \leq a$ alors le test est positif sinon il est négatif.

Remarque : L'inconvénient de ce test est qu'il ne s'applique que si la fonction de répartition est continue. En particulier, il est inopérant pour les lois discrètes.

Chapitre 6

Simulation de variables aléatoires

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques méthodes de simulation de variables aléatoires de loi classique. Dans tout ce chapitre, on suppose que l'on a accès à une fonction permettant de simuler une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Par exemple :

— Sur le logiciel *'R'* : `runif`

— Sur le logiciel Scilab : `grand...'unf'` ou `grand...'def'`

— Sur le logiciel MATLAB :`rand`

6.1 Méthode de la fonction inverse

La première propriété qui nous intéresse a déjà été vue :

Proposition 6.1.1. *Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, et si F_X est inversible, alors $F_X^{-1}(U) \sim X$.*

Application : Supposons que l'on sache calculer F_X^{-1}, alors on peut simuler une v.a. de même loi que X. En particulier, cela donne quelque chose de très simple pour une loi exponentielle de paramètre λ :

$$\text{Si } U \sim \mathcal{U}([0,1]), \text{ alors } -\frac{\ln(U)}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

En réalité, cette propriété peut être étendue en définissant l'inverse généralisée :

Définition 6.1.1. *On appelle inverse généralisée de la fonction de répartition de X la fonction définie par*

$$\forall u \in]0,1[, F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq u\}.$$

Alors on a encore

Proposition 6.1.2. *Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, et si F_X^{-1} désigne l'inverse généralisée de X, alors*

$$F_X^{-1}(U) \sim X.$$

Pour une loi discrète, cette méthode donne quelque chose d'assez simple :

Proposition 6.1.3. *Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $E = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ et $(p_k)_{k\in E}$ définie par $p_k = \mathbb{P}(X = a_k)$. Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Alors,*

$$Y = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \mathbf{1}_{U\in[\sum_{j=0}^{k-1} p_j, \sum_{j=0}^{k} p_{j+1}]}$$

a même loi que X.

Application : Cette méthode permet en particulier de simuler les lois de Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson...

Pour simuler une variable de loi Normale, c'est plus compliqué puisqu'on n'a pas de formule simple pour la fonction de répartition et encore moins pour son inverse. On propose ici une première méthode appelée Méthode de Box-Müller ou Méthode polaire. On verra plus tard une autre méthode basée sur l'algorithme du rejet.

Proposition 6.1.4 (Méthode polaire). *Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Définissons (R,θ) les coordonnées polaires de (X,Y) :*

$$X = R\cos(\theta), \quad Y = R\sin(\theta)$$

avec $R \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors, R^2 et θ sont deux v.a. indépendantes, la première est de loi exponentielle de paramètre $1/2$, la seconde de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Démonstration. Soit (X,Y) des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On calcule la loi conjointe de $\big(X^2+Y^2, \arctan(Y/X)\big)$ en passant en coordonnées polaires. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\phi\Big(X^2+Y^2, \arctan\Big(\frac{Y}{X}\Big)\Big)\Big] &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x^2+y^2, \arctan(y/x))\mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x^2+y^2, \arctan(y/x))e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]} \phi(r^2,\theta)e^{-\frac{1}{2}r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]} \phi(l,\theta)\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}l}\mathrm{d}l\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Donc X^2+Y^2 et $\arctan(Y/X)$ sont indépendantes, X^2+Y^2 a comme loi une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, et $\arctan(Y/X)$ une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. D'où le résultat. □

Algorithme de Box-Müller

— Simulation de $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendantes.

— On pose

$$X := \big(-2\ln(U_1)\big)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi U_2)$$
$$Y := \big(-2\ln(U_1)\big)^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi U_2),$$

Montrer que X et Y sont des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

6.2 Algorithme du rejet

On veut simuler une variable aléatoire X de densité f telle qu'il existe une autre densité g pour laquelle on connaît un algorithme de génération et qui, à une constante c près, majore f partout :

$$\exists\, g \text{ une densité },\exists\, c \in \mathbb{R}_+,\ \forall x, f(x) \leq c \times g(x).$$

Il est clair qu'on ne peut pas trouver une densité g qui majore f directement (i.e. prendre $c = 1$) puisque ces deux fonctions ont une intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1.

Algorithme du rejet :
Soit X de densité f, Y de densité g. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ vérifiant

$$\forall x, f(x) \leq c \times g(x).$$

1. On simule $y_1, u_1, y_2, u_2, \ldots$ des nombres au hasard indépendants tels que y_n simule Y et u_n simule $\mathcal{U}([0,1])$.
2. On simule y_1, u_1. Si
$$u_1 \leq \frac{f(y_1)}{cg(y_1)},$$
on pose $x_1 = y_1$, sinon on recommence avec y_2, u_2. Ainsi,
$$x_1 = y_n \text{ où } n = \inf\left\{k \geq 1; u_k \leq \frac{f(y_k)}{cg(y_k)}\right\}.$$

Proposition 6.2.1. *Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles i.i.d de densité g, telle que $\frac{f}{g}$ est majorée par $c > 0$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose*

$$k = \inf\left\{n \geq 1; U_n \leq \frac{f(Y_n)}{cg(Y_n)}\right\}$$
$$Z = Y_k.$$

Alors, $Z \sim X$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{f(Y_1)}{cg(Y_1)} \text{ et } Y_1 \leq x\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(U_i > \frac{f(Y_i)}{cg(Y_i)}, i = 1, \ldots, n; U_{n+1} \leq \frac{f(Y_{n+1})}{cg(Y_{n+1})} \text{ et } Y_{n+1} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{f(Y_1)}{cg(Y_1)} \text{ et } Y_1 \leq x\right) \times \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(U_1 > \frac{f(Y_1)}{cg(Y_1)}\right)^n\right) \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{f(y)}{cg(y)} g(y)\, dy \times \frac{1}{1 - \mathbb{P}\left(U_1 > \frac{f(Y_1)}{cg(Y_1)}\right)}
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(U_1 > \frac{f(Y_1)}{cg(Y_1)}\right) &= \mathbb{E}\left(1 - \frac{f(Y_1)}{cg(Y_1)}\right) \\
&= 1 - \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{cg(y)} g(y)\, dy \\
&= 1 - \frac{1}{c}
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

donc X est une variable aléatoire continue de densité f. □

Application à la loi Normale : En notant ϕ la densité de la loi normale, on a

$$\forall x, \quad \phi(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{\exp(\frac{1}{2} - |x|)}{\sqrt{2\pi}}$$

En effet,

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{2} - |x|\right) \iff \frac{x^2}{2} - |x| + \frac{1}{2} \geq 0 \iff \frac{(|x| - 1)^2}{2} \geq 0$$

ce qui est toujours vrai. Or,

$$\frac{\exp(\frac{1}{2} - |x|)}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \times \frac{1}{2} e^{-|x|} = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \times g(x)$$

où g est la densité de la loi "double exponentielle" qui correspond à une variable de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ affectée d'un signe tiré à pile ou face.

Remarque : Il est important de choisir c la plus petite possible pour minimiser le nombre de rejets.

Aide-mémoire

Quelques lois discrètes usuelles

nom	paramètres	$X(P)$	EX	var X	E$e^{-\lambda X}$
Dirac	a	δ_a	a	0	$e^{-\lambda a}$
Bernoulli	p	$(1-p)\,\delta_0 + p\,\delta_1$	p	$p(1-p)$	$1-p(1-e^{-\lambda})$
Uniforme	n	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$e^{-\lambda}\frac{1-e^{-\lambda n}}{n(1-e^{-\lambda})}$
Binomiale	n, p	$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\delta_k$	np	$np(1-p)$	$(1-p(1-e^{-\lambda}))^n$
Poisson	μ	$\sum_{k\geq 0} e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}\delta_k$	μ	μ	$e^{-\mu(1-e^{-\lambda})}$
Géométrique	p	$\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}\delta_k$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{p}{e^{\lambda}-1+p}$

Quelques lois à densité classiques

nom	paramètres	densité	EX	var X	E$e^{i\alpha X}$
Uniforme	$a < b$	$1_{[a,b]}(x)/(b-a)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{i\alpha b}-e^{i\alpha a}}{i\alpha(b-a)}$
Exponentielle	λ	$\lambda e^{-\lambda x}1_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - i\alpha}$
Normale	m, σ^2	$\frac{\exp -((x-m)^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$	m	σ^2	$e^{i\alpha m}e^{-\alpha^2\sigma^2/2}$
Cauchy	μ	$\frac{\mu}{\pi(\mu^2+x^2)}$	non définie	non définie	$e^{-\mu\lvert\alpha\rvert}$
Student	n	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)(1+x^2)^{(n+1)/2}}$	0, si $n \geq 2$	$\frac{1}{n-2}$, si $n \geq 3$	$\frac{t^{n/2}K_{n/2}(t)}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}$
Gamma	λ, n	$\frac{\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}1_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda^n}{(\lambda - i\alpha)^n}$
Chi 2 (χ^2)	n	$\frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}1_{\mathbb{R}^+}(x)$	n	$2n$	$(1-2i\alpha)^{-n/2}$
Beta	a, b	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}1_{]0,1[}(x)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}$	$\frac{{}_1F_1(a-1,b-1;-i\alpha)}{{}_1F_1(a-1,b-1;0)}$

Signification des paramètres :
- σ, λ et μ sont des réels positifs,
- a, b et m sont des réels,
- $p \in [0,1]$,
- n est un entier positif.

Remarques :
- La somme de n vaiid de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale (n, p).
- La somme de deux variables de Poisson (resp. normales) indépendantes suit une loi de Poisson (resp. normale).
- La somme de n vaiid exponentielles de paramètre λ suit une loi Gamma (n, λ).
- La somme des carrés de n vaiid normales $\mathcal{N}(0,1)$ suit une loi du χ^2_n.
- Le quotient de deux variables normales centrées indépendantes suit une loi de Cauchy.

Table A1 The standard normal distribution

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9935	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3.2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3.3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3.4	9997	9997	9799	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3.5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3.6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Table of the standard normal cumulative distribution function $\Phi(x) = Pr\{X < x\}$.

Example: suppose that $x = 1.85$. Start with $x = 1.8$ (the row beginning with 9641). In the sixth column one can find the Φ-value, multiplied by 10^4, corresponding to $x = 1.85$. Hence, $\Phi(1.85) = 0.9678$ and the right-sided p-value is equal to 0.0322.

Table A3 The upper critical values of Student's distribution

k	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
				α			
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.656	318.294
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.023	5.893
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183
100	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
200	0.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601	3.131
500	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
1000	0.842	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098

Table of the upper critical values $t_k(\alpha)$ of Student's distribution: $Pr\{T \geq t_k(\alpha)\} = \alpha$, where k denotes the number of degrees of freedom.

Table A2 The upper critical values of the chi-squared distribution

	α													
k	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	-	-	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.1	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	91.6	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	112.3
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4

Table of the upper critical values $\chi^2_k(\alpha)$ of the chi-squared distribution: $Pr\{\chi^2_k \geq \chi^2_k(\alpha)\} = \alpha$, where k denotes the number of degrees of freedom.

est nettement supérieure à 0.05, donc on accepte effectivement l'hypothèse H_0.

3 Table de Kolmogorov-Smirnov

Seuils critiques $D_\alpha(n)$					
n	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
Seuils critiques $D_\alpha(n)$					
n	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.210	0.220	0.240	0.270	0.320
30	0.190	0.200	0.220	0.240	0.290
35	0.180	0.190	0.210	0.230	0.270
> 35	$1.07/\sqrt{n}$	$1.14/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$