Analyse complexe
Contrôle partiel – Lundi 20 mars 2023 – Durée : 1h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. Dans cet exercice, on note γ le cercle-unité parcouru une fois dans le sens direct, et pour tout n entier positif ou nul, on pose $a_n = \binom{2n}{n}$.

a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

b) Pour $m \in \mathbb{Z}$, que vaut $\int_\gamma z^m \, dz$?

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifiez l'égalité :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} \, dz.$$

d) L'objectif de cette question est de calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{4}{25}\right)^n$. On admet dans cette question la formule suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{uz^2 + (2u-1)z + u} \qquad \forall u \in \mathbb{C},\ |u| < \frac{1}{4}. \qquad (*)$$

Dans le reste de cette question on pose $u = \frac{4}{25}$. Au vu de l'égalité $(*)$, il suffit de calculer :

$$\int_\gamma \frac{1}{uz^2 + (2u-1)z + u} \, dz.$$

On admettra sans perdre du temps à la vérifier la factorisation polynomiale suivante :

$$uX^2 + (2u-1)X + u = \frac{4}{25}(X - \frac{1}{4})(X-4).$$

(i) Expliciter les deux nombres réels a et b pour lesquels :

$$\frac{1}{uX^2 + (2u-1)X + u} = \frac{a}{X-4} + \frac{b}{X - \frac{1}{4}}.$$

(ii) Calculer $\int_\gamma \frac{1}{uz^2 + (2u-1)z + u} \, dz$ en fonction de a et b, et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{4}{25}\right)^n$.

e) L'objectif de cette question est de montrer l'égalité $(*)$. Soit $u \in \mathbb{C}$, $|u| < \frac{1}{4}$.

(i) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$a_n u^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [2u(1+\cos t)]^n \, dt.$$

(Indication : on pourra utiliser la question c).)

(ii) Pour tout entier $n \geq 0$, on note f_n la fonction de $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f_n(t) = [2u(1+\cos t)]^n$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, et en déduire l'identité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} [2u(1+\cos t)]^n \, dt.$$

(iii) Montrer enfin que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}[2u(1+\cos t)]^n\,dt = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{uz^2+(2u-1)z+u}.$$

Exercice 2. Soit γ la courbe représentée ci-dessous. Calculer l'indice du point A désigné ci-dessous par rapport à la courbe γ.

On pourra donner une preuve géométrique. Il vous est demandé de rendre le deuxième dessin identique qui vous a été distribué en notant sur celui-ci vos arguments géométriques. N'oubliez pas de noter votre nom et prénom sur ce second dessin que vous allez inclure dans votre copie.