Université Claude Bernard Lyon 1 2022–2023

Analyse complexe
Examen terminal – Lundi 22 mai 2023 – Durée : 2h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Rédigez les trois parties du sujet sur trois copies distinctes en notant votre nom sur chaque copie. Vous devez rendre à la fin trois copies, une pour chaque partie, même si ce sont des copies vides.

Rappel de cours : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe. Il existe une détermination holomorphe de $\log(f)$ sur Ω si et seulement si $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ pour tout lacet γ (C^1 par morceaux) tracé sur Ω.

PARTIE I

Exercice 1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On identifiera $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et on verra également U comme ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U.

a) On suppose dans cette question que pour tout $z \in U$, $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$. Montrer que $f - g$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ puis qu'elle est constante.

b) On suppose dans cette question que pour tout $z \in U$, $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ et que $g(z) \neq 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in U$, $f(z) = ag(z)$.

c) Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by + c = 0$. On suppose dans cette question que l'image de f (vue comme partie de $\mathbb{R}^2$) est incluse dans D. Montrer que f est constante sur U.

Exercice 2. Montrer que le polynôme $P(z) = z^4 + 5z + 3$ admet exactement une racine (multiplicité comprise) dans le disque unité ouvert. (Indication : utiliser le théorème de Rouché).

PARTIE II

Exercice 3. Soient a et b deux nombres complexes distincts, $P(z) = (z-a)(z-b)$ et $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

a) Montrer que s'il existe $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h^2(z) = P(z)$ pour tout $z \in \Omega$, alors $a \notin \Omega$ et $b \notin \Omega$.

b) On suppose que $a \notin \Omega$ et $b \notin \Omega$ et on considère l'application $R : \Omega \to \mathbb{C}$, $R(z) = \dfrac{z-a}{z-b}$. Montrer qu'il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $e^{f(z)} = R(z)$ si et seulement si pour tout lacet γ (C^1 par morceaux) dans Ω,
$$\mathrm{Ind}(a,\gamma) = \mathrm{Ind}(b,\gamma).$$

c) On suppose la condition au-dessus satisfaite.

(i) Montrer qu'il existe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $g^2(z) = R(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

(ii) En déduire qu'il existe $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h^2(z) = P(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

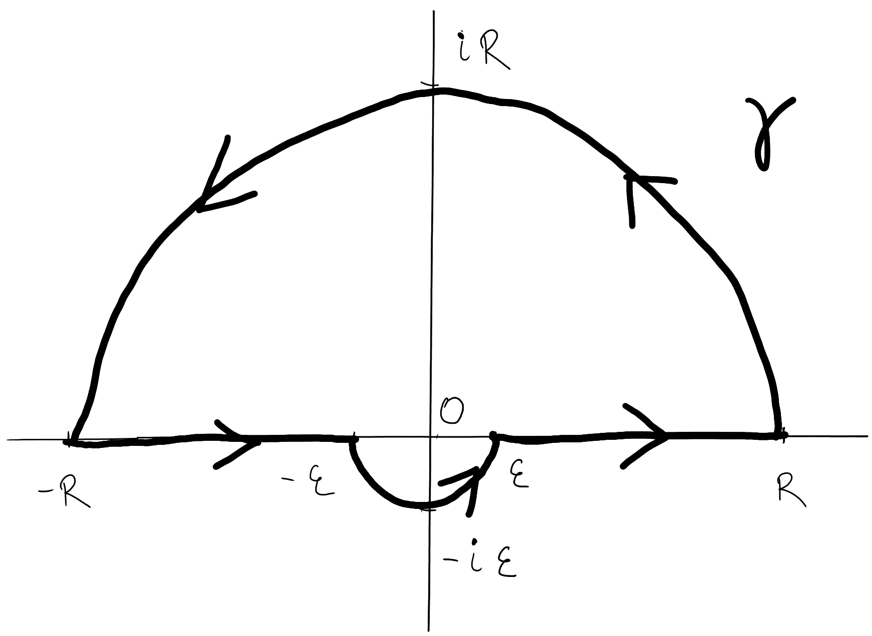
d) Soit $[a,b] = \{(1-t)a + tb,\ t \in [0,1]\} \subset \mathbb{C}$ le segment d'extrémités a et b. La condition de la question b) est-elle satisfaite pour $\Omega = \mathbb{C} \setminus [a,b]$?

PARTIE III

Exercice 4.

a) Soit g une fonction holomorphe dans un disque pointé de centre 0. On suppose que 0 est un pôle simple de g. Soient $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ et $\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}$ l'arc du cercle $C(0,\varepsilon)$ qui va de $\varepsilon e^{i\theta_1}$ à $\varepsilon e^{i\theta_2}$. Déterminer $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} g(z)\,dz$ en fonction de θ_1, θ_2 et du résidu de g en 0.

b) Soit γ la courbe représentée ci-dessous (formée de deux segments et de deux arcs de cercle) :



Calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz.$$

c) Utiliser les questions précédentes pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.
(Indication : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée.)