Université Claude Bernard Lyon 1 2020-2021

Master de Mathématiques, 1re année
Parcours ≪Mathématiques générales≫
Analyse
Contrôle continu 1
Jeudi 22 octobre 2020 – Durée : 1h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Questions de cours.

I) Énoncer le théorème de Banach-Steinhaus.

II) Montrer le résultat suivant :

> *Soient E un espace de Banach et F un espace normé, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires et continues de E dans F. On suppose que pour tout x la suite $T_n(x)$ converge vers un certain $T(x)$. Alors T est une application linéaire et continue et $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}$.*

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit ouvert.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit compact.

Exercice 2. On note par ℓ^1 l'espace des suites réelles sommables muni de la norme $\|x\|_{\ell^1} = \sum_n |x_n|$ et

$$\ell^3 = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \,;\, \sum_n |x_n|^3 < \infty\}$$

muni de la norme $\|x\|_{\ell^3} = \left(\sum_n |x_n|^3\right)^{\frac{1}{3}}$.

a) Montrer que ℓ^3 muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^3}$ est complet.

b) Est-ce que $\|\cdot\|_{\ell^3}$ est une norme sur ℓ^1, et si oui l'espace normé correspondant est-il complet ? Même question pour $\|\cdot\|_{\ell^1}$ sur ℓ^3.

On définit

$$F = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^1 \;;\; x_0 + 2x_1 = 0\}$$

et on le munit de la norme $\|\cdot\|_{\ell^1}$.

c) F est-il ouvert dans ℓ^1 ? Fermé dans ℓ^1 ? Compact ?

d) Soit $T \in F'$ un élément du dual de F. Montrer qu'il existe une suite bornée $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$T(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x_n \qquad (*)$$

pour tout $x \in F$. (On pourra utiliser sans démontrer un résultat vu en TD.) Cette suite (a_n) est-elle unique ?

e) Calculer la norme $\|T\|_{F'}$ en fonction de la suite (a_n). En déduire qu'on peut choisir la suite (a_n) de telle manière que $\|T\|_{F'} = \sup_{n\geq 0} |a_n|$.

f) Plus généralement, montrer que pour tout sous-espace vectoriel G de ℓ^1 et pour tout élément du dual $g \in G'$ (G étant muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^1}$) il existe une suite bornée $(b_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x_n \quad \forall x \in G$$

et

$$\|g\|_{G'} = \sup_{n\geq 0} |b_n|.$$