CC2 Analyse
7 Décembre 2020

December 6, 2020

1 Question de cours

Enoncez le théorème de diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints.

2 Problème

On rappelle (ou on admet) que l'ensemble des opérateurs compacts est fermé pour la norme opérateur.

Dans ce problème $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable, muni d'un produit scalaire $\langle \, , \, \rangle$ qui est **linéaire à gauche et antilinéaire à droite comme dans votre cours**.

Pour $u, v \in \mathcal{H}$ on note $B_{u,v}$ l'application linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ définie par

$$B_{u,v}(x) = \langle x \, , \, v \rangle \, u \, ,$$

pour tout $x \in \mathcal{H}$.

1) a) Montrez que $B_{u,v}$ est un opérateur continu. Quelle est sa norme ?

b) Montrez que $B^*_{u,v} = B_{v,u}$.

c) Montrez que $B_{u,v}B_{w,z} = B_{u,\langle v \, , \, w \rangle z}$.

2) Dans le cas où $\|u\| = 1$, montrez que $B_{u,u}$ est un projecteur orthogonal. Quelle est son image ? Quel est son noyau ?

On se donne une suite complexe (λ_n) qui tend vers 0. On se donne deux familles orthonormales (u_n) et (v_n) dans $\mathcal{H}$.

3) a) Montrez que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \, B_{u_n, v_n}$$

converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

b) En déduire que l'opérateur $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \, B_{u_n, v_n}$ est compact.

4) Montrez que

$$T^* = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\lambda}_n \, B_{v_n,u_n}$$

et que

$$T^*T = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 \, B_{v_n,v_n} \, .$$

5) a) Montrez que

$$\text{Ker } T = (\text{vect}\{v_n \, ; \; \lambda_n \neq 0\})^{\perp} \, .$$

b) Déterminez Ker T^* de manière similaire.

c) Montrez que $\overline{\operatorname{Im} T} = (\text{Ker } T^*)^{\perp}$.

6) a) Montrez qu'il existe une unique application linéaire continue U de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} Uv_n = e^{i\theta_n} \, u_n & \text{si } \lambda_n \neq 0 \text{ et si } \theta_n \text{ est un argument de } \lambda_n \\ U = 0 & \text{sur Ker } T \, . \end{cases}$$

b) Montrez que $\operatorname{Im} U = \overline{\operatorname{Im} T}$.

c) Montrez que U^* est l'unique application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} U^*u_n = e^{-i\theta_n} \, v_n & \text{si } \lambda_n \neq 0 \text{ et si } \theta_n \text{ est un argument de } \lambda_n \\ U^* = 0 & \text{sur Ker } T^* \, . \end{cases}$$

d) Montrez que U^*U est un projecteur orthogonal. Quelle est son image ? Quel est son noyau ?

7) En vertu de la question 3) a), on considère l'opérateur continu

$$|T| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \, B_{v_n,v_n} \, .$$

a) Montrez que $|T|$ est auto-adjoint, positif et que $|T|^2 = T^*T$.

b) Montrez que $U\,|T| = T$.