Université Claude Bernard Lyon 1 2018-2019

Master de Mathématiques, 1re année
Parcours ≪Mathématiques générales≫
Analyse
Contrôle terminal
Jeudi 10 janvier 2019 – Durée : 3h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. Soit une fonction f entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$) telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z) = 0$. On rappelle le principe des zéros isolés qui dit que les zéros d'une fonction entière non nulle sont isolés dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que si $f^{(n)}$ est non constante, alors l'ensemble $F_n = \{z\,;\, f^{(n)}(z) = 0\}$ est fermé d'intérieur vide.

b) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{C}$.

c) En déduire que f est un polynôme.

Exercice 2. On note $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme uniforme. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit les opérateurs "translation" τ_x sur $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ et sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$[\tau_x f](y) = f(y-x)\,.$$

a) Soit $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to C_0^0(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire, continu et commutant avec les translations au sens où $\forall x \in \mathbb{R}^n, \tau_x T = T\tau_x$.

(i) Montrer que l'application $L^2(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto Tf(0)$ est linéaire et continue.

(ii) En déduire l'existence d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$Tf(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)\,dx \qquad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

(iii) Montrer enfin que $Tf = f * g$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (la notation $*$ désigne le produit de convolution).

b) Réciproquement, soit $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ fixée. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on pose $T(f) = f * g$.

(i) Montrer que $T(f) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Montrer que la convolution entre deux fonctions continues à support compact est une fonction continue à support compact.

(iii) En utilisant un argument de densité montrer que $T(f) \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ et que T est linéaire et continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3. Soit $1 \le p < \infty$. On définit

$$\ell^p = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\, x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit aussi ℓ_c^p le sous espace de ℓ^p formé des suites nulles à partir d'un certain rang.
Les parties III et IV sont indépendantes.

Partie I.

a) Montrer que ℓ^p muni de cette norme est un espace de Banach.

b) L'espace ℓ_c^p muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est-il un espace de Banach ? Justifiez votre réponse.

On se donne maintenant une suite $(\lambda_n)_n$ de nombres complexes et on construit l'opérateur T sur ℓ^p défini par

$$T(x) = y \quad \text{où} \quad x = (x_n)_n, \quad y = (y_n)_n \quad \text{et} \quad y_n = \lambda_n x_n.$$

(i) On suppose dans cette question que la suite $(\lambda_n)_n$ est bornée. Montrer que T est à valeurs dans ℓ^p, que $T : \ell^p \to \ell^p$ est un opérateur linéaire et continu et calculer sa norme.

(ii) Réciproquement, supposons que T est linéaire et continu de ℓ^p dans ℓ^p. Montrer que la suite $(\lambda_n)_n$ est bornée.

Partie II. On suppose dans cette partie que la suite $(\lambda_n)_n$ est bornée.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T.

d) Soit μ un nombre complexe qui n'est pas valeur propre de T.

(i) Montrer que $T - \mu I$ est une bijection de ℓ_c^p dans ℓ_c^p (on n'impose pas de continuité à ce stade) et déterminer son inverse. On a noté par I l'application identité.

(ii) En déduire que $T - \mu I$ admet un inverse continu dans ℓ^p si et seulement si μ n'appartient pas à l'adhérence de l'ensemble $\{\lambda_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Partie III. On suppose dans cette partie que $p = 2$.

e) Déterminer T^* l'adjoint de T.

f) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit autoajoint.

g) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit normal.

Partie IV. On suppose dans cette partie que $1 < p < \infty$. Soit p' l'exposant conjugué de p : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de nombres complexes avec la propriété que pour toute suite $(x_n)_n \in \ell^p$ nous avons que $\sum_n |\alpha_n x_n| < \infty$.

h) Soit $S_N : \ell^p \to \mathbb{C}$, $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_n$. Montrer que S_N appartient au dual de ℓ^p.

i) Montrer que la suite S_N est bornée dans le dual de ℓ^p. (On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.)

j) Calculer la norme de S_N.

k) En déduire que $(\alpha_n)_n \in \ell^{p'}$.

l) Réciproquement, montrer que si $(\alpha_n)_n \in \ell^{p'}$ alors $\sum_n |\alpha_n x_n| < \infty$ pour tout $(x_n)_n \in \ell^p$.