Master de Mathématiques, 1re année
Parcours ≪Mathématiques générales≫
Analyse
Contrôle terminal
Jeudi 14 janvier 2021 – Durée : 3h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $a \geq 1$ on a

$$\lim_{n\to\infty} f(na) = 0.$$

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On définit

$$F_k = \{a \geq 1 \; ; \; |f(na)| \leq \varepsilon \; \forall n \geq k\}.$$

a) Montrer que chaque ensemble F_k est fermé.

b) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = [1,\infty[$.

c) Montrer qu'il existe k_0 tel que F_{k_0} contient un certain intervalle $[a,b]$ avec $a < b$.

d) Soit $I_n = [na, nb]$. Montrer que $f(I_n) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ pour tout $n \geq k_0$.

e) Montrer que pour tout $n \geq \dfrac{a}{b-a}$ les intervalles I_n et I_{n+1} ne sont pas disjoints.

f) En déduire que $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq a \max(k_0, \dfrac{b}{b-a})$ et conclure que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 2. Soit C_{00} l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) Pour $u \in \ell^1$ on définit $T_u(x) = \displaystyle\sum_n u_n x_n$. Montrer que $T_u \in (C_{00})'$ pour tout $u \in \ell^1$ et que l'application $\ell^1 \ni u \mapsto T_u \in (C_{00})'$ est une isométrie bijective de ℓ^1 sur le dual $(C_{00})'$ de C_{00}. Ainsi, le dual de C_{00} avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ s'identifie à ℓ^1.

b) Soit $f : C_{00} \times C_{00} \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par $f(x,y) = \displaystyle\sum_n x_n y_n$.

(i) Montrer que les applications $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont des formes linéaires continues sur C_{00}.

(ii) A-t-on l'existence d'une constante C telle que $|f(x,y)| \leq C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$ pour tout $x, y \in C_{00}$?

c) Soit $T : C_{00} \to C_{00}$ l'application linéaire définie par $T((x_n)_n) = \left(\dfrac{x_n}{n+1}\right)_n$.

(i) Montrer que T est continue et bijective.

(ii) Montrer que T^{-1} n'est pas continue.

(iii) Que peut-on en déduire sur C_{00} ?

d) On voit maintenant C_{00} comme un sous-espace de ℓ^2 et on le munit du produit scalaire et de la norme induite.

(i) C_{00} muni de ce produit scalaire est-il un espace de Hilbert ?

(ii) Montrer que $F = \{(u_n) \in C_{00}; \displaystyle\sum_n \frac{u_n}{n+1} = 0\}$ est un sous-espace fermé de $(C_{00}, \|\cdot\|_2)$.

(iii) Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$. (Indication : on pourra utiliser la suite u^k définie par $u_n^k = 1$ si $n = 0$, $u_n^k = -k-1$ si $n = k$ et 0 sinon.)

(iv) En déduire que $C_{00} \neq F \oplus F^{\perp}$.

(v) Soit $G = \{(u_n) \in \ell^2;\ \sum_n \frac{u_n}{\sqrt{n+1}} = 0\}$. Montrer que l'orthogonal de G dans ℓ^2 est $\{0\}$. Le sous-espace G est-il fermé dans ℓ^2 ?

Exercice 3. Soit $H = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x}\,dx < \infty\}$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx.$$

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$.

b) Vérifier que $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$ et en déduire que $\mathbb{R}[X]$ est inclus dans H.

c) Montrer que $\langle X^k, L_n \rangle$ vaut $(-1)^n n!$ si $k = n$ et vaut 0 si $k < n$. En déduire que L_n est une suite orthonormée de H.

d) On admet que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans H. Montrer que (L_n) est une base hilbertienne de H.

e) Calculer L_3 et en déduire la valeur de $\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^\infty (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x}\,dx$.

Exercice 4. Soit $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'opérateur de primitivation défini par $Tf = g$ où

$$g(x) = \int_0^x f(y)\,dy.$$

Montrer que T est compact et déterminer T^*. (Indication : utiliser le théorème d'Ascoli.)