Feuille de TD 5

Exercice 1

1. Montrer $\{1_A, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ est un sous-ensemble fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
2. Montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.
3. Montrer que $T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^\infty a_n 1_{](1/n+2),1/(n+1)]}$ définit une isométrie $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to L^\infty([0,1])$ et en déduire que $L^\infty([0,1])$ n'est pas séparable.

Exercice 2 Soit X un espace normé et Y un espace de Banach. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de X, alors toute application linéaire et continue de V dans Y se prolonge de manière unique en une application linéaire et continue de $\overline{V}$ dans Y.

Exercice 3 Soit H un espace de Hilbert et V un s.e.v. de H. Montrer directement (sans utiliser Hahn-Banach) que toute forme linéaire et continue sur V se prolonge en une forme linéaire et continue sur H.

Exercice 4 Soit X un espace normé et E un s.e.v. de dimension finie.

1. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Montrer qu'il existe $f_1, \ldots, f_n \in X'$ telles que $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tous i, j.
2. Montrer qu'il existe une projection linéaire et continue de X sur E de norme au plus égale à $\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|\|e_i\|$.

Exercice 5 Soient X et Y des espaces de Banach et $T : X \to Y$ linéaire et continue. Pour tout $f \in Y'$ on définit $g = f \circ T$.

1. Montrer que si $f \in Y'$ alors $g \in X'$ et que l'application $T'(f) = g$ est linéaire et continue de Y' dans X'.
2. Montrer que $\|T'\| = \|T\|$.
3. Montrer que T' est injectif si et seulement si $T(X)$ est dense dans Y.

Exercice 6 **Identités de polarisation :** Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\| \ \|$ la norme associée.

1. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que l'on a pour tout $x, y \in E$
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$
2. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que l'on a pour tout $x, y \in E$
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[+\|+x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 - i\,\|ix+y\|^2 + i\,\|-ix+y\|^2\right].$$
3. En déduire que l'on peut toujours retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

Exercice 7 On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\| \ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :
$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
L'objectif est de montrer que E muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire et compte tenu de l'exercice on pose
$$\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right].$$
Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout $x, y \in E$ on a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ et $\langle -x, y\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$.
2. Montrer que pour $x, y, z \in E$ on a $\langle x+y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle$ (On pourra montrer d'abord l'égalité suivante : $\langle x+y, z\rangle = 2\langle y, z\rangle + \langle x-y, z\rangle$.)
3. Montrer, en utilisant b), que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$ et, en utilisant un argument de continuité, que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.
4. En déduire que $\langle x, y\rangle$ définit bien un produit scalaire sur E qui donne la norme $\| \ \|$.

Exercice 8

Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé. Soit P une projection de H sur F.

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale
2. $||P|| = 1$
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leqslant ||x||^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice 9 Polynômes de Laguerre

Soit μ la mesure sur $[0, \infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire $\mu(A) = \int_A e^{-x} dx$. Soit

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^n).$$

Montrer que L_n est une famille orthonormale de polynômes de $L^2([0, \infty[, \mu)$.

Exercice 10 Deux Identités du parallélogramme généralisées Soit H un espace de Hilbert et $x_1, ..., x_n \in H$

1. Montrer que pour $t \in]0, 1[$, on a :

$$||tx_1 + (1-t)x_2||^2 + t(1-t)||x_1 - x_2||^2 = t||x_1||^2 + (1-t)||x_2||^2.$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{-1,1\}^n} ||\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2$$

3. Montrer que si $p \neq 2$ alors il n'existe pas d'isomorphisme linéaire entre ℓ^p et ℓ^2. (Supposer par l'absurde qu'il existe un tel isomorphisme $T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ et considérer $x_i = T(e_i)$)

Exercice 11 Soit $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$. On pose $C = \{f \in H : f \geqslant 0 \ p.p.\}$.

Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f 1_{\{f \geqslant 0\}}$.