
Feuille de TD 7

Un opérateur est une application linéaire et continue. Le spectre d'un opérateur, noté par σ , est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $T - \lambda I$ ne soit pas inversible. Le rayon spectral est le sup de $|\lambda|$ lorsque λ parcourt le spectre.

Exercice 1. Soient λ_n une suite de nombres complexes et T l'opérateur de ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) défini par $(Tx)_n = \lambda_n x_n$. Démontrer que T est bien défini et continu si et seulement si la suite λ_n est bornée. Dans le cas où T est continu, calculer les valeurs propres et le spectre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit compact.

Exercice 2. Soit T l'opérateur défini sur $C([0, 1])$ par $Tf(0) = \pi f(0)/2$ et, pour $x > 0$,

$$Tf(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy.$$

Démontrer que T est un opérateur continu de $C([0, 1])$ dans lui-même et que $\|T\| = \pi/2$. Indication : on pourra faire le changement de variables $y = xt$.

Exercice 3. Soit E un espace de Hilbert et T un opérateur compact sur E . Un opérateur est dit de rang fini si son image est de dimension finie.

- Montrer qu'un opérateur de rang fini est compact.
- Soit $\varepsilon > 0$ et x_1, \dots, x_n tels que $T(B(0, 1)) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. On note $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ et $S = P_X T$. Montrer que $\|S - T\| < 2\varepsilon$.
- En déduire que dans un espace de Hilbert, tout opérateur compact est limite d'opérateurs de rang fini.

Exercice 4. Opérateurs de Hilbert-Schmidt. Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

- Soient $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de E . Démontrer que si $T \in \mathcal{L}(E)$ alors les deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|T^*f_n\|^2$$

ont la même nature et, en cas de convergence, la même somme. En déduire la même conclusion pour les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|Tf_n\|^2.$$

On fixe désormais une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E et l'on note $\mathcal{H}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ formé des T pour lesquels la quantité

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}$$

est finie (on dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt).

- b) Démontrer que $\mathcal{H}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ avec inclusion stricte et que pour tout $T \in \mathcal{H}(E)$, $\|T\| \leq \|T\|_2$. Démontrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{H}(E)$ (la norme de Hilbert-Schmidt) qui munit $\mathcal{H}(E)$ d'une structure d'espace de Hilbert.
- c) Montrer que tout opérateur de rang fini est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
- d) Soit $T \in \mathcal{H}(E)$. On note, pour $n \geq 0$, P_n le projecteur orthogonal sur l'espace vectoriel engendré par e_j , $0 \leq j \leq n$. Démontrer que pour tout entier n positif, $TP_n \in \mathcal{H}(E)$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - TP_n\|_2 = 0$. En déduire que l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{H}(E)$.
- e) On suppose dorénavant que $E = L^2(0, 1)$ et l'on choisit une base hilbertienne quelconque $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Démontrer que la famille $e_m \otimes \bar{e}_n$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 1] \times [0, 1])$.
- f) On note par T_K l'opérateur de $L^2(0, 1)$ défini par un opérateur à noyau de carré intégrable $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Montrer que $T_K \in \mathcal{H}(E)$ et que

$$\|T_K\|_2 = \|K\|_{L^2} = \|k_{m,n}\|_{\ell^2},$$

où

$$k_{m,n} = \langle K, e_m \otimes \bar{e}_n \rangle = \langle T_K e_m, e_n \rangle.$$

- g) Réciproquement, soit $T \in \mathcal{H}(E)$. Montrer que $T = T_K$ où $K = \sum_{m,n} k_{m,n} e_m \otimes \bar{e}_n$, $k_{m,n} = \langle T e_m, e_n \rangle$.

Exercice 5. Soient E un espace de Hilbert, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. Démontrer que la relation

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle x, f_n \rangle f_n$$

définit sur E un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ qui est compact si et seulement si la suite μ_n tend vers 0 et qui est auto-adjoint si et seulement si tous les termes de la suite sont réels.

Exercice 6. Soit T un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert séparable E . Soit $f : \text{vp}(T) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée.

- a) Montrer la formule suivante :

$$T = \sum_{\lambda \in \text{vp}(T)} \lambda P_\lambda,$$

où P_λ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre E_λ .

- b) Montrer que l'expression

$$f(T) = \sum_{\lambda \in \text{vp}(T)} f(\lambda) P_\lambda$$

définit un opérateur de $\mathcal{L}(E)$.

- c) Montrer les égalités suivantes :

$$\|f(T)x\|^2 = \sum_{\lambda \in \text{vp}(T)} |f(\lambda)|^2 \|P_\lambda x\|^2 \quad \text{et} \quad \|f(T)\| = \sup_{\lambda \in \text{vp}(T)} |f(\lambda)|.$$

- d) Soit $g : \text{vp}(T) \rightarrow \mathbb{C}$ une autre fonction bornée. Montrer que $(fg)(T) = f(T)g(T)$.
 e) Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un polynôme. Montrer que

$$P(T) = a_0 + a_1T + \dots + a_nT^n$$

(on a défini $P(T)$ comme dans la question b). En déduire la même chose pour une série entière de rayon de convergence $> r(T)$.

- f) Montrer que pour $\mu \notin \text{vp}(T)$, on a

$$\frac{1}{\mu - x}(T) = (\mu I - T)^{-1}.$$

- g) On suppose dans cette question que f est continue en 0 (on considère que f est définie sur $\text{vp}(T) \cup \{0\}$) et que E est de dimension infinie. Montrer que $f(T)$ est compact si et seulement si $f(0) = 0$ et que $f(T)$ est auto-adjoint si et seulement si f est à valeurs réelles.

Exercice 7. Soit T un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert séparable. Soit, pour chaque valeur propre non nulle λ de T , d_λ la dimension du sous-espace propre correspondant E_λ . Démontrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{vp}(T) \setminus \{0\}} d_\lambda \lambda^2 < \infty.$$

Exercice 8. Racine carrée. Soit T un opérateur auto-adjoint, compact et positif sur un espace de Hilbert séparable E .

- a) Soit $R = \sqrt{x}(T)$. Montrer que R est un opérateur auto-adjoint, compact et positif tel que $R^2 = T$.

On se donne maintenant un autre opérateur R' auto-adjoint, compact et positif tel que $R'^2 = T$. On veut montrer que $R = R'$.

- b) Montrer que si T est supposé seulement autoadjoint, compact et $f \in C^0(\text{vp}(T))$, alors $f(T)$ commute avec tout opérateur commutant avec T .
 c) En déduire que $RR' = R'R$.
 d) Soient X et X' deux opérateurs auto-adjoints, compacts et positifs tels que $X^2 = R$ et $X'^2 = R'$. Démontrer que pour tout $x \in E$,

$$\|Xy\|^2 + \|X'y\|^2 = 0,$$

où $y = (R - R')x$.

- e) En déduire que pour tout $x \in E$, $\|(R - R')x\|^2 = 0$ et donc $R = R'$.