Feuille de TD 7

Un opérateur est une application linéaire et continue. Le spectre d'un opérateur, noté par σ, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $T - \lambda I$ ne soit pas inversible. Le rayon spectral est le sup de $|\lambda|$ lorsque λ parcourt le spectre.

Exercice 1. Montrer que si T_n est une suite d'opérateurs compacts qui convergent au sens de la norme vers un opérateur T, alors T est compact (l'ensemble des opérateurs compacts est fermé dans l'espace des opérateurs).

Exercice 2. Soient λ_n une suite de nombres complexes et T l'opérateur de ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ défini par $(Tx)_n = \lambda_n x_n$. Démontrer que T est bien défini et continu si et seulement si la suite λ_n est bornée. Dans le cas où T est continu, calculer les valeurs propres et le spectre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit compact.

Exercice 3. Soit T l'opérateur défini sur $C([0,1])$ par $Tf(0) = \pi f(0)/2$ et, pour $x > 0$,

$$Tf(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}y.$$

Démontrer que T est un opérateur continu de $C([0,1])$ dans lui-même et que $\|T\| = \pi/2$. Indication : on pourra faire le changement de variables $y = xt$.

Exercice 4. Soit E un espace de Hilbert et T un opérateur compact sur E. Un opérateur est dit de rang fini si son image est de dimension finie.

a) Montrer qu'un opérateur de rang fini est compact.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et $x_1, \ldots, x_n$ tels que $T(B(0,1)) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. On note $X = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ et $S = P_X\, T$. Montrer que $\|S - T\| < 2\varepsilon$.

c) En déduire que dans un espace de Hilbert, tout opérateur compact est limite d'opérateurs de rang fini.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert

a) Soit f_n une famille orthonormale et $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_n \alpha_n f_n$ converge dans H si et seulement si $(\alpha_n) \in \ell^2$. De plus, nous avons que $\left\|\sum_n \alpha_n f_n\right\| = \|(\alpha_n)\|_{\ell^2}$.

b) Supposons que H est somme hilbertienne d'une suite de sous-espaces fermés H_n : $H = \oplus_n H_n$.

   i) Si $x_n \in H_n$ alors montrer l'équivalence suivante : $\sum_n x_n$ converge si et seulement si $\sum_n \|x_n\|^2$ converge.

   ii) Pour tout $x \in H$ nous avons que $x = \sum_n x_n$ où $x_n = P_{H_n}(x)$. De plus $\|x\|^2 = \sum \|x_n\|^2$.

Exercice 6. Opérateurs de Hilbert-Schmidt. Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

a) Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de E. Démontrer que si $T \in \mathcal{L}(E)$ alors les deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|T^* f_n\|^2$$

ont la même nature et, en cas de convergence, la même somme. En déduire la même conclusion pour les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|Tf_n\|^2.$$

On fixe désormais une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et l'on note $\mathcal{H}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ formé des T pour lesquels la quantité

$$\|T\|_2 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big)^{1/2}$$

est finie (on dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt).

b) Démontrer que $\mathcal{H}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ avec inclusion stricte et que pour tout $T \in \mathcal{H}(E)$, $\|T\| \leq \|T\|_2$. Démontrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{H}(E)$ (la norme de Hilbert-Schmidt) qui munit $\mathcal{H}(E)$ d'une structure d'espace de Hilbert.

c) Montrer que tout opérateur de rang fini est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

d) Soit $T \in \mathcal{H}(E)$. On note, pour $n \geq 0$, P_n le projecteur orthogonal sur l'espace vectoriel engendré par e_j, $0 \leq j \leq n$. Démontrer que pour tout entier n positif, $TP_n \in \mathcal{H}(E)$ et que $\lim_{n\to\infty} \|T - TP_n\|_2 = 0$. En déduire que l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{H}(E)$.

e) On suppose dorénavant que $E = L^2(0,1)$ et l'on choisit une base hilbertienne quelconque $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que la famille $e_m \otimes \overline{e}_n$ est une base hilbertienne de $L^2\big([0,1]\times[0,1]\big)$.

f) On note par T_K l'opérateur de $L^2(0,1)$ défini par un opérateur à noyau de carré intégrable $K \in L^2\big([0,1]\times[0,1]\big)$. Montrer que $T_K \in \mathcal{H}(E)$ et que

$$\|T_K\|_2 = \|K\|_{L^2} = \|k_{m,n}\|_{\ell^2},$$

où

$$k_{m,n} = \langle K, e_m \otimes \overline{e}_n\rangle = \langle T_K e_m, e_n\rangle.$$

g) Réciproquement, soit $T \in \mathcal{H}(E)$. Montrer que $T = T_K$ où $K = \sum_{m,n} k_{m,n} e_m \otimes \overline{e}_n$, $k_{m,n} = \langle Te_m, e_n\rangle$.

Exercice 7. Soient E un espace de Hilbert, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. Démontrer que la relation

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle x, f_n\rangle f_n$$

définit sur E un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ qui est compact si et seulement si la suite μ_n tend vers 0 et qui est auto-adjoint si et seulement si tous les termes de la suite sont réels.

Exercice 8. Soit T un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert séparable E. Soit $f : \mathrm{vp}(T) \to \mathbb{C}$ une fonction bornée.

a) Montrer la formule suivante :

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{vp}(T)} \lambda P_\lambda,$$

où P_λ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre E_λ.

b) Montrer que l'expression

$$f(T) = \sum_{\lambda \in \mathrm{vp}(T)} f(\lambda) P_\lambda$$

définit un opérateur de $\mathcal{L}(E)$.

c) Montrer les égalités suivantes :

$$\|f(T)x\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{vp}(T)} |f(\lambda)|^2 \|P_\lambda x\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|f(T)\| = \sup_{\lambda \in \mathrm{vp}(T)} |f(\lambda)|.$$

d) Soit $g : \mathrm{vp}(T) \to \mathbb{C}$ une autre fonction bornée. Montrer que $(fg)(T) = f(T)g(T)$.

e) Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme. Montrer que

$$P(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$$

(on a défini $P(T)$ comme dans la question b). En déduire la même chose pour une série entière de rayon de convergence $> r(T)$.

f) Montrer que pour $\mu \notin \overline{\mathrm{vp}(T)}$, on a

$$\frac{1}{\mu - x}(T) = (\mu I - T)^{-1}.$$

En déduire que $\sigma(T) = \overline{\mathrm{vp}(T)}$.

g) On suppose dans cette question que f est définie sur $\overline{\mathrm{vp}(T)}$, continue en 0 et que et que E est de dimension infinie. Montrer que $f(T)$ est compact si et seulement si $f(0) = 0$ et que $f(T)$ est auto-adjoint si et seulement si f est à valeurs réelles.

Exercice 9. Soit T un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert séparable. Soit, pour chaque valeur propre non nulle λ de T, d_λ la dimension du sous-espace propre correspondant E_λ. Démontrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{vp}(T) \setminus \{0\}} d_\lambda \lambda^2 < \infty.$$

Exercice 10. Racine carrée. Soit T un opérateur auto-adjoint, compact et positif sur un espace de Hilbert séparable E.

a) Soit $R = \sqrt{x}(T)$. Montrer que R est un opérateur auto-adjoint, compact et positif tel que $R^2 = T$.

On se donne maintenant un autre opérateur R' auto-adjoint, compact et positif tel que $R'^2 = T$. On veut montrer que $R = R'$.

b) Montrer que si T est supposé seulement autoadjoint, compact et $f \in L^\infty(\mathrm{vp}(T))$, alors $f(T)$ commute avec tout opérateur commutant avec T.

c) En déduire que $RR' = R'R$.

d) Soient X et X' deux opérateurs auto-adjoints, compacts et positifs tels que $X^2 = R$ et $X'^2 = R'$. Démontrer que pour tout $x \in E$,

$$\|Xy\|^2 + \|X'y\|^2 = 0,$$

où $y = (R - R')x$.

e) En déduire que pour tout $x \in E$, $\|(R - R')x\|^2 = 0$ et donc $R = R'$.