Feuille de TD 9

Exercice 1 Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ est continue et bornée. Si en plus p et q sont finis alors $f * g$ est aussi nulle à l'infini. Cela reste vrai lorsque $p = \infty$ ou $q = \infty$? (On pourra utiliser un argument de densité.)

Exercice 2 (**Équation de la chaleur**) Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on note

$$G(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

le noyau de la chaleur.

a) Montrer que $\|G(t,\cdot)\|_{L^1} = 1$ et que G est C^∞ sauf en $(0,0)$.

b) Soit $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $u(t,x) = G(t,\cdot) * f$ est solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale f, c'est-à-dire que

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \quad \text{pour } t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$

et que $u(t,\cdot)$ converge vers f simplement lorsque t tend vers 0.

Exercice 3 (**Exemples de convergence faible dans** L^p) Soit $1 < p < \infty$, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ de norme 1 dans $L^p(\mathbb{R})$. Montrer que les suites suivantes convergent faiblement vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$ bien qu'elles soient de norme 1 :

a) Oscillations : $e^{inx} f(x)$;

b) Concentration : $n^{\frac{1}{p}} f(nx)$;

c) Fuite à l'infini : $f(x-n)$;

d) Étalement : $n^{-\frac{1}{p}} f(x/n)$.

Exercice 4 Soit $f_n = \sin(nx)$ et $g_n = |\sin(nx)|$. Montrer que ces suites ne convergent pas fortement dans $L^2([0, 2\pi])$ mais convergent faiblement. Calculer la limite faible.

Exercice 5 (**La topologie faible n'est pas métrisable**) Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

a) Montrer que tout voisinage faible d'un point x_0 contient une droite qui passe par x_0.

b) On suppose dans cette question que E est métrisable pour la topologie faible. Montrer qu'il existe une suite x_n telle que $\|x_n\| = n$ et $x_n \rightharpoonup 0$. (On pourra considérer la boule $B(0, \frac{1}{n})$ pour la distance associée à la topologie faible et utiliser la question précédente.)

c) En déduire que la topologie faible de E n'est pas métrisable.

Exercice 6 Soit E un espace normé de dimension infinie. On note par S la sphère unité et par B la boule unité fermée.

a) Soit x_0 de norme < 1. Montrer que tout voisinage faible de x_0 intersecte S. (Utiliser l'exercice précédent.)

b) En déduire que B est inclus dans l'adhérence faible de S.

c) Montrer que l'adhérence faible de S est B.

Exercice 7 Soit H un espace de Hilbert séparable muni d'une base hilbertienne (e_n). On considère l'ensemble $F = \{e_m + me_n \ ; \ m, n \geqslant 1\}$.

a) Montrer que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible de F. (On pourra utiliser que les suites faiblement convergentes sont bornées.)

b) Montrer que e_n appartient à l'adhérence séquentielle faible de F.

c) Montrer enfin que 0 appartient à l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F.

Exercice 8

a) Dans ℓ^∞ on considère C l'ensemble des suites $x = (x_n)$ telles que $\liminf_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$. Montrer que C est un convexe fermé fort, non fermé faible$*$. (On pourra considérer des suites finies avec des termes négatifs).

b) Montrer qu'une forme linéaire et continue sur E' muni de la topologie faible$*$ (où E est un espace normé) est nécessairement une évaluation, c'est-à-dire de la forme $f \mapsto f(x)$. (On pourra considérer l'image inverse de l'intervalle $]-1, 1[$ et utiliser l'exercice 1 de la feuille 4.)

c) Soit E un espace de Banach non réflexif. Soit S une forme linéaire et continue sur E' qui n'est pas une évaluation. Montrer que le noyau de S est un hyperplan fermé fort, mais pas fermé faible$*$.