Annales de sujets d'examens pour l'examen terminal d'analyse complexe en 2023

Exercice 1. (mars 2017)

a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^2 z^n$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\frac{1}{4}}}$;

(iii) $\sum_{0}^{\infty} e^n z^{n^3}$.

b) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Exercice 2. (mai 2017)

a) Étant donnés deux nombres complexes z_1 et z_2, montrer que $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

On rappelle que la fonction tangente est définie par $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

b) Montrer que le domaine de définition de tan est $D := \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Montrer que pour tout $z \in D$, $\tan(z) = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$.

d) Montrer que pour tout $z \in D$, $\tan'(z) = 1 + (\tan(z))^2$.

Étant donné un ouvert U de $\mathbb{C}$, on appelle détermination holomorphe de la fonction arctangente sur U toute fonction holomorphe f sur U à valeurs dans $D = \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ telle que pour tout $z \in U$, $\tan(f(z)) = z$.

e) Étant donné un ouvert U de $\mathbb{C}$, montrer que s'il existe une détermination holomorphe de la fonction arctangente sur U alors $-i \notin U$ et $i \notin U$.
Indication : on pensera à dériver.

f) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i ni $-i$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est une détermination holomorphe de la fonction arctangente sur U.

(ii) f est une fonction holomorphe sur U telle que pour tout $z \in U$, $e^{2if(z)} = \frac{1+iz}{1-iz}$ (autrement dit, $2if$ est une détermination holomorphe du logarithme de $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$).

g) Soit U un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i ni $-i$. Montrer que si f et g sont deux déterminations holomorphes de arctangente sur U alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $z \in U$, $g(z) = f(z) + k\pi$.

h) Notons $A = \{iy;\ y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, montrer que

$$z \in A \iff \frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{R}^-.$$

i) Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{iy;\ y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$. Construire toutes les déterminations holomorphes de l'arctangente sur U.

Exercice 3. (mai 2017)

Soient $0 < a < 1$ et f la fonction définie par l'expression

$$f(z) = \frac{\exp(az)}{\exp(z)-1} - \frac{1}{z}.$$

a) Montrer que 0 est une fausse singularité pour f et déterminer la valeur du prolongement de f en 0.

b) Déterminer les pôles de f, leur ordre ainsi que les résidus correspondants.

c) Soit $z = x + iy$.

(i) Montrer que si $y = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\left|\frac{\exp(az)}{\exp(z)-1}\right| = \frac{e^{ax}}{e^x+1}.$$

(ii) Montrer que si $x \neq 0$ alors

$$\left|\frac{\exp(az)}{\exp(z)-1}\right| \leq \frac{e^{ax}}{|e^x-1|}.$$

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n le carré centré en l'origine et dont l'un des sommets est $\pi(2n+1)(1+i)$. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de n telle que $|f(z)| \leq C$ pour tout $z \in \partial A_n$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit $z_0 \neq 2k\pi i$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

e) Déterminer les pôles de la fonction $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z(z-z_0)}$, leur ordre ainsi que les résidus correspondants.

f) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $z_0 \notin \partial A_n$. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\partial A_n} \frac{f(z)}{z(z-z_0)}\,dz$$

où ∂A_n est parcouru dans le sens direct (on discutera suivant les valeurs de n et z_0).

g) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial A_n} \frac{f(z)}{z(z-z_0)}\,dz = 0.$$

h) Montrer enfin que

$$f(z_0) = z_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_k}{z_0 - 2k\pi i},$$

où les λ_k sont des nombres complexes indépendants de z_0 que l'on déterminera.

Exercice 4. (juin 2017)

Soit $a > 2$ un nombre réel. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^a}\,dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^a}\,dx.$$

a) Justifier la convergence des intégrales définissant I et J.

Soit $\log(z)$ la détermination principale du logarithme complexe. On définit

$$z^a = e^{a\log(z)} \qquad \text{et} \qquad f(z) = \frac{\log(z)}{1+z^a}.$$

b) Soit $\gamma_{\varepsilon,R}$ le chemin qui entoure la région $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \varepsilon < |z| < R \text{ et } 0 < \arg(z) < \frac{2\pi}{a}\}$ orienté dans le sens direct. On suppose $0 < \varepsilon < 1 < R$. Calculer

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz.$$

c) En faisant $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$, calculer I et J.

Exercice 5. (mars 2018)

On considère les séries entières

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{et} \quad S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3k \\ -1 & \text{si } n = 3k+1 \\ 0 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$

a) Calculer les rayons de convergence des séries entières S_1 et S_2.

b) Déterminer les coefficients du produit des séries entières S_1 et S_2.

c) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la somme de la série entière S_2.

Exercice 6. (mai 2018)

Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$$

dans chacune des couronnes circulaires suivantes :

a) $\mathscr{C}_1 = \{0 < |z| < 2\}$;

b) $\mathscr{C}_2 = \{2 < |z| < 3\}$;

c) $\mathscr{C}_3 = \{3 < |z|\}$;

Préciser si les développements de Laurent obtenus sont aussi des développements en série entière. Quel est le résidu de f en -2 ?

Exercice 7. (mai 2018)

Soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvert connexe Ω. On note par P la partie réelle de f et Q la partie imaginaire. On suppose qu'il existe des nombres réels a, b et c non tous nuls tels que $aP + bQ = c$ dans Ω. Montrer que f est constante.

Exercice 8. (mai 2018)

Soit a un réel strictement positif et $0 < \varepsilon < R$. On pose

$$f(z) = \frac{e^{-z} e^{iz}}{z(z^4 + a^4)}.$$

Soit γ l'union des chemins γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4 où

— γ_1 va de ε à R sur l'axe réel ;

— γ_2 est le quart du cercle $C(0,R)$ qui va de R à iR ;

— γ_3 est le segment qui va de iR à $i\varepsilon$;

— γ_4 est le quart du cercle $C(0,\varepsilon)$ qui va de $i\varepsilon$ à ε.

a) Représenter graphiquement le chemin γ.

b) Calculer

$$\int_{\gamma_4} \frac{1}{z}\, dz.$$

c) Montrer que $f(z) = \dfrac{C_0}{z} + O(1)$ quand $z \to 0$ pour une constante C_0 à déterminer.

d) En intégrant la fonction f sur le chemin γ, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x(x^4+a^4)}\,dx$$

Exercice 9. (avril 2019)

Soit f une fonction entière. On suppose f périodique de période 1 et i. Montrer que f est constante.

Exercice 10. (avril 2019)

Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct et soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant le disque unité fermé.

a) Exprimer l'intégrale $I = \displaystyle\int_C (2+z+\frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}\,dz$ en fonction des valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2(t/2)\,dt$.

Exercice 11. (mai 2019)

Soit $m \geq 1$ un entier impair, et $a \geq 0$ un réel. On considère $I_{m,a} = \displaystyle\int_a^\infty \frac{\sin(x)}{x^m}dx$.

a) Justifier d'abord la convergence de l'intégrale impropre pour $a \geq 0, m = 1$, et pour $a > 0, m > 1$.

b) On considère le cas $m = 1, a = 0$. Établir que l'on a

$$2iI_{1,0} = \lim_{r\to+\infty}\int_{\{r^{-1}\leq|x|\leq r\}} \frac{e^{ix}}{x}dx.$$

c) Dessiner le contour $\gamma = [-r,-r^{-1}]\cup\{r^{-1}e^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi\}\cup[r^{-1},r]\cup\{re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ parcouru dans le sens direct.

d) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz$ par la formule des résidus.

e) Montrer en utilisant $|e^{i(x+iy)}| \leq e^{-y}$ que l'intégrale $\displaystyle\int_{\{re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z}dz$ tend vers 0 quand $r \to +\infty$.

f) Montrer que l'on a $\displaystyle\int_{\{r^{-1}e^{i\theta},\theta\in[\pi,2\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z}dz \to i\pi$ quand $r \to +\infty$.

g) Conclure en obtenant la valeur de $I_{1,0}$.

h) *(Question plus difficile)* En suivant des étapes similaires et en considérant le contour $\gamma = [-r,-a]\cup\{ae^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi\}\cup[a,r]\cup\{re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, prouver que l'on a, pour $m = 2k+1$:

$$I_{m,a} = \frac{\pi(-1)^k}{2(2k)!} - \sum_{j\,:\,k+j\geq 0} \frac{(-1)^{k+j}a^{2j+1}}{(2j+1)(2k+2j+1)!}.$$

Exercice 12. (mai 2019)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui vérifie l'implication suivante $f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z) > 0$.

a) Prouver qu'il existe une fonction holomorphe g telle que $f = e^g$ et qu'on peut choisir g telle que $|\mathrm{Im}(g)| < \pi$.

b) Prouver que e^{ig} est une fonction holomorphe bornée. En déduire, si $\Omega = \mathbb{C}$, que f est constante.

c) Prouver que, pour tout lacet γ contenu dans Ω, on a $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$.

d) Supposons $\Omega = B(0,1) \setminus \{0\}$. Prouver que 0 est soit une singularité artificielle de f, soit une singularité essentielle, mais pas un pôle.

e) Dans le cas d'une singularité artificielle, on appelle $\tilde{f}$ l'extension holomorphe de f à $B(0,1)$: prouver $\tilde{f}(0) \neq 0$.

f) Peut-on avoir $\tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$ avec $\tilde{f}(0) < 0$?

g) Supposons $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}$ et $|f(z)| \leq C|z|^m$. Démontrer que f est bornée.

h) Peut-on dire que f est constante, alors ? (pour répondre "non" il faut trouver un exemple de fonction f non-constante définie sur cet ouvert Ω et satisfaisant la condition $f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z) > 0$).

Exercice 13. (mai 2020)
On souhaite calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{3 - \sin t + \cos t}{3 + \cos t + \sin t} dt.$$

a) Prouver que cette intégrale ne change pas si on enlève "$-\sin t + \cos t$" du numérateur.

b) Calculer cette intégrale à l'aide du théorème des résidus

Exercice 14. (mai 2020)
Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Cette fonction est holomorphe sur l'union des trois couronnes ouvertes $C(0,0,1)$, $C(0,1,2)$ et $C(0,2,\infty)$ où $C(z_0,r_1,r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$.

a) Exprimer f sous la forme $f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$, pour $A,B \in \mathbb{C}$.

b) Trouver les coefficients de la série de Laurent de f en chacune des trois couronnes ci-dessus.

c) Calculer, pour $z \in C(0,1,2)$, la somme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n}{2^{(n+1)_+}} z^n,$$

où $(n+1)_+ := \max\{0, n+1\}$.

Exercice 15. (mai 2020)
Considérer la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!}.$$

a) Prouver que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

b) Soit $f(z)$ la somme de série entière pour $z \in \mathbb{C}$. Vérifier que la fonction f, restreinte à $\mathbb{R}$, est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ pour tout $x \geq 0$.

c) Vérifier que l'on a

$$f''(z) = -\frac{f(z) + 2f'(z)}{4z} \quad \text{pour tout } z \neq 0.$$

Exercice 16. (mai 2020)

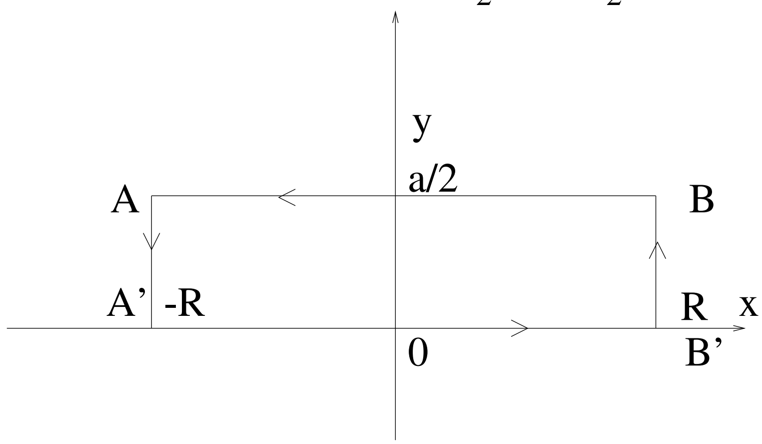
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}, \qquad \text{pour } x,y \in \mathbb{R}.$$

Prouver que $f(z)^2 = z$, et que f est holomorphe sur Ω mais n'est pas la restriction à Ω d'une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}$.

Exercice 17. (mai 2020)

On désigne par γ_R le contour rectangle de sommets R, $R+i\dfrac{a}{2}$, $-R+i\dfrac{a}{2}$ et $-R$ parcouru dans le sens direct :



a) Que vaut $\displaystyle\int_{\gamma_R} e^{-z^2}\,dz$?

b) Montrer que $\displaystyle\int_{\overrightarrow{AA'}} e^{-z^2}$ et $\displaystyle\int_{\overrightarrow{BB'}} e^{-z^2}$ tendent vers 0 quand $R \to \infty$.

c) En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\cos ax\,dx.$$

On pourra utiliser l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 18. (mai 2020)

On désigne par γ le cercle de centre 2 et rayon 3. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z^2+1}{z(z-i)^3}\,dz$.

Exercice 19. (mai 2020)

On se donne un ouver $\Omega \subset \mathbb{C}$ et on cherche à déterminer s'il existe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et bornée mais non constante.

a) Une telle fonction existe-t-elle dans le cas $\Omega = \mathbb{C}$?

b) Prouver qu'une telle fonction existe dès qu'une boule $B(z_0,R)$ avec $R > 0$ est contenue dans $\mathbb{C}\setminus\Omega$.

c) Prouver qu'une telle fonction existe dès qu'une demi-droite $\{z_0 + th : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ (pour $z_0, h \in C$ deux complexes fixés, avec $h \neq 0$) est contenue dans $\mathbb{C}\setminus\Omega$.

d) Une telle fonction existe-t-elle dans le cas $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2, \dots\ z_N\}$, c'est-à-dire le plan complexe tout entier privé d'un nombre fini de points ?

e) Quid du cas $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{0\})$, c'est-à-dire le plan complexe tout entier privé d'une suite injective de points ainsi que de sa limite ?

Exercice 20. (6 mai 2020)

On désigne par γ le cercle de centre 2 et rayon 3 parcouru dans le sens direct. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z+2)(z-i)^3}\,dz$.

Exercice 21. (24 juin 2020)

Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le lacet défini par $\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(2t)$. Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{4z^2-1}\,dz$.

Exercice 22. (mai 2021)

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.

a) Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros distincts, tous d'ordre fini.

b) Soient $a_1, \ldots, a_p$ les zéros de f de multiplicités $m_1, \ldots, m_p$. On pose
$$g(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1} \ldots (z-a_p)^{m_p}}{f(z)}.$$
Montrer que g n'a que des fausses singularités et que g s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sans zéros.

c) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une constante C tel que $|g(z)| \leq C(1+|z|)^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

d) Montrer que g est un polynôme.

e) Montrer que g est constante et conclure que f est un polynôme.

Exercice 23. (mai 2021)

Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx.$$
On pourra utiliser sans preuve les exemples faits dans le cours.

Exercice 24. (mai 2021)

Pour chacune des relations suivantes, existe-t-il des fonctions holomorphes dans $D(0,1)$ les vérifiant ? Si oui, déterminer toutes ces fonctions.

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3}$ et $f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$ pour tout $n \geq 2$;

b) $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 2$;

c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}$ pour tout $n \geq 2$;

d) $n^{-5/2} \leq \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq 2n^{-5/2}$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 25. (mai 2021)

Trouver le rayon de convergence R et à l'intérieur du disque $B(0,R)$ calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_0^\infty n^2 z^{2n}$.

Exercice 26. (mai 2021)

Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe où $D = D(0,1)$ est le disque unité. On suppose qu'il existe $a, b \in D$, $a \neq b$, tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Soit

$$g(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

On rappelle le lemme Schwarz suivant :

> **Lemme de Schwarz.** Soit $\varphi : D \to D$ holomorphe telle que $\varphi(0) = 0$. Alors $|\varphi(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et $|f'(0)| \leq 1$.

a) Montrer que g est un automorphisme du disque unité, c'est-à-dire une bijection holomorphe, d'inverse holomorphe, de D dans D. (On ne se contentera pas de citer un résultat du cours ou du TD, la preuve complète est demandée.)

b) On pose $h = g^{-1} \circ f \circ g$. Montrer que h est holomorphe de D dans D, que $h(0) = 0$ et qu'il existe $c \in D \setminus \{0\}$ tel que $h(c) = c$.

c) Montrer que $z \mapsto h(z)/z$ est une fonction holomorphe de D dans $\overline{D}$.

d) En déduire que $h(z) = z$ pour tout $z \in D$, puis que $f(z) = z$ pour tout $z \in D$.

e) Est-ce que l'énoncé suivant est vrai ? Justifiez votre réponse.

> Soit $\Omega \neq \emptyset, \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Toute fonction holomorphe de Ω dans Ω avec au moins deux points fixes distincts est nécessairement l'identité.

f) Est-ce que l'énoncé suivant est vrai ? Justifiez votre réponse.

> Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec au moins deux points fixes distincts est nécessairement l'identité.

Exercice 27. (mai 2021)

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos t + \sin t}\, dt.$$

Exercice 28. (juin 2021)

Trouver le rayon de convergence de la série entière suivante

$$\sum_{n \geq 5} (2^n + 3^n)\, z^n.$$

Exercice 29. (juin 2021)

a) Soit U un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$ et soit g une fonction holomorphe sur U et continue sur $\overline{U}$. Montrer que si $|g|$ est constante sur la frontière de U alors : g est constante ou g admet un zéro dans U.

b) Soit f une fonction entière qui envoie le cercle unité dans lui-même (i.e. si $|z| = 1$ alors $|f(z)| = 1$). On veut montrer qu'il existe un nombre complexe ω de module 1 et un $n \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega z^n$.

(i) Montrer que f a un nombre fini de zéros dans le disque unité.

(ii) On note $\{a_1, \ldots, a_q\}$ l'ensemble des zéros distincts de f dans le disque unité et m_i la multiplicité de a_i. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_q\}$, on pose

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{q} \left(\frac{1 - \overline{a_i} z}{z - a_i} \right)^{m_i}.$$

Montrer que g s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

(iii) En utilisant la question a), montrer que g est constante.

(iv) En utilisant le fait que f est entière, montrer que l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_q\}$ est vide ou égal à $\{0\}$.

(v) Conclure.

Exercice 30. (juin 2021)

Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\, dz$$

où $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation $x^2+y^2 = 2x+2y$.

Exercice 31. (mai 2022)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} e^n n z^n$. En quels points du bord du disque de convergence la série converge-t-elle ?

Exercice 32. (mai 2022)

Soit γ la courbe suivante orientée dans le sens direct : $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \,;\, z\bar{z} = z + \bar{z}\}$. Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)^3}\, dz.$$

Exercice 33. (mai 2022)

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité D telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On suppose de plus qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que $|f'(z)| \leq M$ pour tout $z \in D$.

a) Montrer que $|f'(z) - 1| \leq (M+1)|z|$ pour tout $z \in D$. (Indication : utiliser le lemme de Schwarz.)

b) Montrer que

$$|f(z) - z| \leq \frac{M+1}{2}|z|^2$$

pour tout $z \in D$.

On note $D_1 = D\Big(0, \dfrac{1}{M+1}\Big)$ et $D_2 = D\Big(0, \dfrac{1}{2(M+1)}\Big)$.

c) Montrer que pour tout $a \in D_2$, l'équation $f(z) = a$ admet exactement une solution z_a dans D_1. (Indication : utiliser le théorème de Rouché.)

d) Montrer que l'application $a \mapsto z_a$ est holomorphe sur D_2.