Université Claude Bernard Lyon 1 2019-2020

Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours ≪Mathématiques générales et applications≫
Calcul différentiel et analyse complexe
Contrôle continu 1
Mercredi 19 février 2020 – Durée : 45 minutes

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{R})$ une application différentiable. On pose $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(x) = f(x)x$, où le produit doit être compris comme le produit entre une matrice et un vecteur. L'application g est-elle différentiable ? Si oui, déterminer sa différentielle en tout point.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que f admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles d'ordre 1 que l'on explicitera.

b) La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

c) Montrer que les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent.

d) f est-elle de classe C^2 ? Argumenter.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On munit E de la norme 1 :

$$\Big\| \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \Big\|_1 = \sum_{i=0}^{d} |a_i|.$$

On munit $E \times E$ de la norme produit

$$\|(P,Q)\| = \|P\|_1 + \|Q\|_1$$

et on définit $b : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$b(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Montrer que b est différentiable sur $E \times E$ et déterminer la différentielle en tout point.