Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours ≪Mathématiques générales et applications≫
Calcul différentiel et analyse complexe
Examen terminal
Mercredi 30 mai 2018 – Durée : 3h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1,x_2) = \big(x_1 + \frac{1}{4}\tanh(x_1+x_2), x_2 + \frac{1}{4}\tanh(2x_1)\big).$$

On rappelle que

$$\tanh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \qquad 0 < \tanh' = 1 - \tanh^2 < 1.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|x\| = \max(|x_1|,|x_2|)$.

a) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = x - f(x)$. Montrer que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\|.$$

b) Soit $z \in \mathbb{R}^2$. À l'aide de la fonction $h(x) = x - f(x) + z$, montrer que z admet un unique antécédent par f.

c) Calculer la différentielle de f et montrer qu'elle est inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer que la fonction réciproque de f est de classe C^1.

e) Déterminer l'antécédent de 0 par f. Calculer la différentielle de f^{-1} en 0.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + \sin(x+y) + y^2 + e^x - 1$.

a) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I et une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $0 \in I$ et pour tout $x \in I$ on a $f(x,\psi(x)) = 0$ et $\psi(0) = 0$.

b) Calculer $\psi'(0)$.

Exercice 3. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$$

dans chacune des couronnes circulaires suivantes :

a) $\mathscr{C}_1 = \{0 < |z| < 2\}$;

b) $\mathscr{C}_2 = \{2 < |z| < 3\}$;

c) $\mathscr{C}_3 = \{3 < |z|\}$;

Préciser si les développements de Laurent obtenus sont aussi des développements en série entière. Quel est le résidu de f en –2 ?

Exercice 4. Soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvert connexe Ω. On note par P la partie réelle de f et Q la partie imaginaire. On suppose qu'il existe des nombres réels a, b et c non tous nuls tels que $aP + bQ = c$ dans Ω. Montrer que f est constante.

Exercice 5. Soit a un réel strictement positif et $0 < \varepsilon < R$. On pose

$$f(z) = \frac{e^{-z}e^{iz}}{z(z^4+a^4)}.$$

Soit γ l'union des chemins γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4 où

— γ_1 va de ε à R sur l'axe réel ;

— γ_2 est le quart du cercle $C(0,R)$ qui va de R à iR ;

— γ_3 est le segment qui va de iR à $i\varepsilon$;

— γ_4 est le quart du cercle $C(0,\varepsilon)$ qui va de $i\varepsilon$ à ε.

a) Représenter graphiquement le chemin γ.

b) Calculer

$$\int_{\gamma_4} \frac{1}{z}\,dz.$$

c) Montrer que $f(z) = \frac{C_0}{z} + O(1)$ quand $z \to 0$ pour une constante C_0 à déterminer.

d) En intégrant la fonction f sur le chemin γ, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{x(x^4+a^4)}\,dx$$