

# Calcul Différentiel et Analyse Complexe

## Examen blanc, 13 mai 2020

**Exercice 1** (5 points). Étant donné un nombre réel positif  $\alpha > 0$ , considérer la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , définie par

$$f(x, y) = (x^3 - 3x|y|^\alpha, 3|x|^\alpha y - y^3).$$

- Pour quels valeurs de  $\alpha$  la fonction  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0)$  ?
- Pour quels valeurs de  $\alpha$  la fonction  $f$  est-elle différentiable en  $(1, 0)$  ?
- Pour quels valeurs de  $\alpha$  la fonction  $f$  est-elle  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ? Écrire dans ce cas sa matrice Jacobienne.
- Supposons  $f \in C^1$ . Si on identifie maintenant  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$  en identifiant  $(x, y)$  au complexe  $x + iy$ , pour quels valeurs de  $\alpha$  la fonction  $f$  admet-elle une dérivée complexe en 1 ? et en 2 ?
- Avec la même identification entre  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ , prouver que  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $\alpha = 2$ . S'agit-il d'un biholomorphisme du plan complexe sur lui-même ?

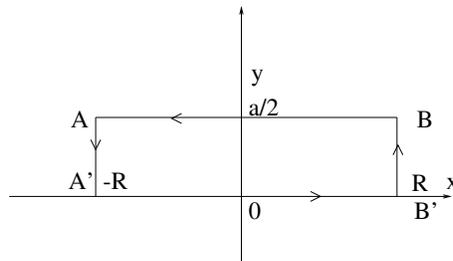
**Exercice 2** (5 points). Considérer la courbe  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(\theta) := (\sin(3\theta) \cos(\theta), \sin(3\theta) \sin(\theta)),$$

et supposer que son support  $E = \gamma([0, \pi])$  s'écrit comme  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$  pour une certaine fonction  $f \in C^1$ .

- Prouver qu'alors on a  $\nabla f(0, 0) = 0$ .
- En supposant  $f \in C^2$ , prouver que l'on a aussi  $D^2 f(0, 0) = 0$ .

**Exercice 3** (6 points). On désigne par  $\gamma_R$  le contour du rectangle de sommets  $R, R + i\frac{a}{2}, -R + i\frac{a}{2}$  et  $-R$  parcouru dans le sens direct :



- Que vaut  $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz$  ?
- Montrer que  $\int_{AA'} e^{-z^2}$  et  $\int_{BB'} e^{-z^2}$  tendent vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$ , si  $a > 0$  est fixé
- En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos ax \, dx.$$

On pourra utiliser l'intégrale de Gauss  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

**Exercice 4** (6 points). Si  $m, n$  sont des entiers naturels, définissons

$$I_{m,n} := \int_{\mathbb{R}} \frac{x^m}{1+x^{2n}} dx.$$

- Prouver que cette intégrale converge si et seulement si  $2n \geq m + 2$ .
- Prouver que l'on a  $I_{m,n} = 0$  si l'intégrale converge et  $m$  est impair.
- Calculer  $I_{2,2}$  à l'aide du théorème des résidus et prouver que l'on a  $I_{2,2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .
- Calculer  $I_{2,3}$ .
- Calculer  $I_{m,n}$  en l'exprimant comme une somme finie de termes explicites

# Calcul Différentiel et Analyse Complexe

## Examen blanc, 12 mai 2020

**Exercice 1** (5 points). Étant donné un nombre réel positif  $\alpha > 0$ , considérer la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , définie par

$$f(x, y) = (x^3 - 3x|y|^\alpha, 3|x|^\alpha y - y^3).$$

- Pour quels valeurs de  $\alpha$  la fonction  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0)$  ?
- Pour quels valeurs de  $\alpha$  la fonction  $f$  est-elle différentiable en  $(1, 0)$  ?
- Pour quels valeurs de  $\alpha$  la fonction  $f$  est-elle  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ? Écrire dans ce cas sa matrice Jacobienne.
- Supposons  $f \in C^1$ . Si on identifie maintenant  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$  en identifiant  $(x, y)$  au complexe  $x + iy$ , pour quels valeurs de  $\alpha$  la fonction  $f$  admet-elle une dérivée complexe en 1 ? et en 2 ?
- Avec la même identification entre  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ , prouver que  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $\alpha = 2$ . S'agit-il d'un biholomorphisme du plan complexe sur lui-même ?

### Corrigé

- En regardant composante par composante, et en considérant que les fonctions  $x^3$  et  $y^3$  sont  $C^\infty$ , il suffit de garantir que les fonctions  $x|y|^\alpha$  et  $y|x|^\alpha$  sont différentiables en  $(0, 0)$ . Or, pour tout  $\alpha > 0$  ces fonctions sont  $o(\|(x, y)\|)$ , ce qui suffit pour dire qu'elles sont différentiables avec différentielle nulle en  $(0, 0)$ .
- Il faut maintenant garantir que les fonctions  $x|y|^\alpha$  et  $y|x|^\alpha$  sont différentiables en  $(1, 0)$ , où elles s'annulent. Si  $\alpha > 1$  elles sont  $C^1$  et donc différentiables. Si  $\alpha \leq 1$  la dérivée partielle par rapport à  $y$  de  $x|y|^\alpha$  en  $(1, 0)$  n'existe pas, et donc la fonction n'est pas différentiable. Il faut donc  $\alpha > 1$ .
- Si  $\alpha \leq 1$  la fonction n'est pas différentiable en  $(1, 0)$ , donc pas  $C^1$ . Si  $\alpha > 1$  la fonction est une combinaison de fonctions  $C^1$ , et elle est aussi différentiable. Sa matrice Jacobienne vaut

$$\begin{pmatrix} 3x^2 - 3|y|^\alpha & -3xy|y|^{\alpha-2} \\ 3xy|x|^{\alpha-2} & 3|x|^\alpha - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

A noter que, pour  $1 < \alpha \leq 2$ , le produit  $y|y|^{\alpha-2}$  est considéré 0 en  $y = 0$  (et de même pour  $x|x|^{\alpha-2}$  en  $x = 0$ ).

- Pour avoir une dérivée complexe il faut que la Jacobienne ait des termes identiques sur la diagonale et opposés en dehors de la diagonale. Il faut donc

$$\begin{cases} 3x^2 - 3|y|^\alpha = 3|x|^\alpha - 3y^2, \\ 3xy|y|^{\alpha-2} = 3xy|x|^{\alpha-2}. \end{cases}$$

Dans le cas du point 1 (donc  $x = 1, y = 0$ ) la première équation donne  $3 = 3$  quel que soit  $\alpha$ , la deuxième  $0 = 0$ . La fonction  $f$  admet donc une dérivée complexe en 1 pour tout  $\alpha > 1$ . La différentiabilité complexe en 2 est plus contraignante, puisqu'on trouve  $12 = 3 \cdot 2^\alpha$ , qui n'est vérifié que pour  $\alpha = 2$ .

- Si on  $\alpha = 2$  on voit facilement que l'on a  $f(x + iy) = (x + iy)^3$  et donc  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Pour  $\alpha \neq 2$  la fonction n'est pas différentiable au sens complexe au point 2, donc elle ne peut pas être holomorphe. Dans le cas  $\alpha = 2$ , où l'on a  $f(z) = z^3$ , il ne s'agit pas d'un biholomorphisme parce que la fonction n'est pas injective.

**Exercice 2** (5 points). Considérer la courbe  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

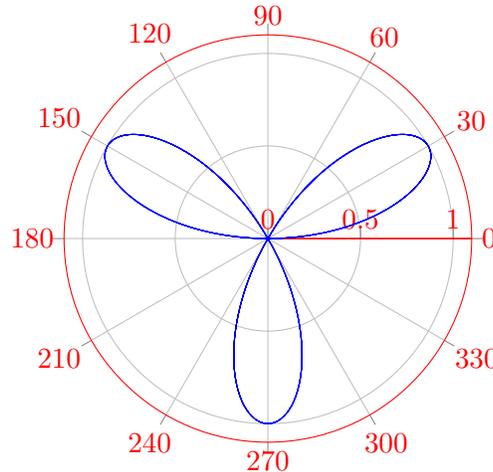
$$\gamma(\theta) := (\sin(3\theta) \cos(\theta), \sin(3\theta) \sin(\theta)),$$

et supposer que son support  $E = \gamma([0, \pi])$  s'écrit comme  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$  pour une certaine fonction  $f \in C^1$ .

- Prouver qu'alors on a  $\nabla f(0, 0) = 0$ .
- En supposant  $f \in C^2$ , prouver que l'on a aussi  $D^2 f(0, 0) = 0$ .

### Corrigé

On commence par dessiner la courbe, en obtenant



On peut voir qu'il s'agit d'une trèfle, avec trois courbes régulières se rencontrant à l'origine. Si on imagine de l'écrire sous la forme  $\{f = 0\}$ , on voit qu'on ne peut pas avoir  $f \in C^1$  et  $\nabla f(0, 0) \neq 0$ . En effet, dans ce cas, on pourrait appliquer le théorème des fonctions implicites et écrire  $E$  comme une seule courbe régulière passant par l'origine (le graphe d'une fonction  $y = \phi(x)$  ou  $x = \phi(y)$ ), alors qu'on en a trois.

Prenons maintenant  $f \in C^2$  avec  $E = \{f = 0\}$  et dérivons deux fois  $f(\gamma(\theta)) = 0$ . On obtient

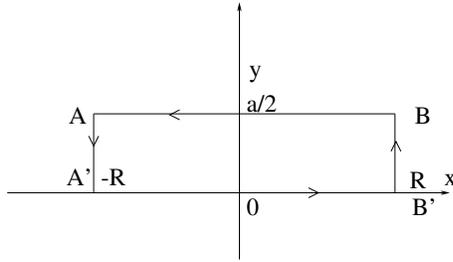
$$D^2 f(\gamma(\theta)) \gamma'(\theta) \cdot \gamma'(\theta) + \nabla f(\gamma(\theta)) \cdot \gamma''(\theta) = 0.$$

Si on prend  $\theta$  tel que  $\gamma(\theta) = (0, 0)$ , en utilisant  $\nabla f(0, 0) = 0$ , on a donc  $D^2 f(0, 0) \gamma'(\theta) \cdot \gamma'(\theta) = 0$ . Or, il y a trois valeurs différentes de  $\theta$  qu'on peut prendre, qui donnent lieu à trois vecteurs  $\gamma'(\theta)$  différents et non colinéaires. Ceci permet de conclure  $D^2 f(0, 0) = 0$ . En effet, si  $A$  est une matrice symétrique telle que  $Av \cdot v = 0$  pour trois vecteurs "non colinéaires", on a  $A = 0$ . Pour voir cela, on peut supposer que les trois vecteurs  $v_i$  sont des vecteurs unités (quitte à les normaliser), diagonaliser  $A$  selon une base orthonormée, et écrire les vecteurs  $v_i = (\cos(t_i), \sin(t_i))$  dans cette même base. On peut aussi supposer  $t_i \in [0, \pi[$ , quitte à multiplier fois  $-1$  les vecteurs. Si on appelle  $\lambda$  et  $\mu$  les deux termes diagonaux de  $A$  après diagonalisation, on aurait

$$0 = \lambda \cos^2(t_i) + \mu \sin^2(t_i) = (\lambda - \mu) \cos^2(t_i) + \mu.$$

Les valeurs prises par  $\cos^2(t_i)$  pour trois valeurs différentes de  $t_i \in [0, \pi[$  ne peuvent pas être toutes égales. La fonction  $s \mapsto (\lambda - \mu)s + \mu$  s'annulerait donc sur au moins deux valeurs différentes de  $s$ . Comme c'est une droite, elle serait forcément la droite nulle, donc  $\lambda - \mu = 0$  et  $\mu = 0$ . La matrice  $A$  serait alors diagonalisable avec valeurs propres nulles, donc  $A = 0$ .

**Exercice 3** (6 points). On désigne par  $\gamma_R$  le contour du rectangle de sommets  $R, R + i\frac{a}{2}, -R + i\frac{a}{2}$  et  $-R$  parcouru dans le sens direct :



- a) Que vaut  $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz$  ?  
 b) Montrer que  $\int_{AA'} e^{-z^2}$  et  $\int_{BB'} e^{-z^2}$  tendent vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$ , si  $a > 0$  est fixé  
 c) En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos ax \, dx.$$

On pourra utiliser l'intégrale de Gauss  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

### Corrigé

- a) La fonction  $z \mapsto e^{-z^2}$  étant holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et la courbe  $\gamma_R$  étant un lacet, l'intégrale vaut 0.  
 b) En écrivant le chemin allant de  $B'$  à  $B$  comme  $\gamma_R(t) = R+it$ ,  $t \in [0, a/2]$ , on peut écrire  $\int_{B'B} e^{-z^2} = \int_0^{a/2} e^{-(R+it)^2} i dt$ . On a donc

$$\int_{B'B} e^{-z^2} = e^{-R^2} \int_0^{a/2} e^{-t^2} e^{-2Rit} i dt$$

et donc

$$\left| \int_{B'B} e^{-z^2} \right| \leq e^{-R^2} \frac{a}{2} e^{a^2/4}.$$

Cette quantité tend vers 0 si  $R \rightarrow \infty$  et  $a$  est fixé. Le calcul pour le chemin allant de  $A$  à  $A'$  est essentiellement le même.

- c) Tout d'abord on écrit

$$\iint_{AB} e^{-z^2} = \iint_{AA'} e^{-z^2} + \iint_{A'B'} e^{-z^2} + \iint_{B'B} e^{-z^2}.$$

En explicitant les intégrales sur  $AB$  et  $A'B'$  on obtient

$$\int_{-R}^R e^{-(t+ia/2)^2} dt = \int_{-R}^R e^{-t^2} dt + \varepsilon(R),$$

où  $\varepsilon(R)$  est une quantité qui tend vers 0 pour  $R \rightarrow \infty$ , grâce à ce qui a été montré avant. En prenant la limite  $R \rightarrow \infty$  on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(t+ia/2)^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt,$$

donc

$$e^{a^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-iat} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Ceci donne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} (\cos(at) - i \sin(at)) dt = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$$

et, en prenant seulement la partie réelle des deux côtés,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \cos(at) dt = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}.$$

**Exercice 4** (6 points). Si  $m, n$  sont des entiers naturels, définissons

$$I_{m,n} := \int_{\mathbb{R}} \frac{x^m}{1+x^{2n}} dx.$$

- Prouver que cette intégrale converge si et seulement si  $2n \geq m + 2$ .
- Prouver que l'on a  $I_{m,n} = 0$  si l'intégrale converge et  $m$  est impair.
- Calculer  $I_{2,2}$  à l'aide du théorème des résidus et prouver que l'on a  $I_{2,2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .
- Calculer  $I_{2,3}$ .
- Calculer  $I_{m,n}$  en l'exprimant comme une somme finie de termes explicites

### Corrigé

- L'intégrande est une fonction positive et continue sur  $\mathbb{R}$ , asymptotiquement équivalente, pour  $x \rightarrow \pm\infty$ , à  $x^{m-2n}$ . Pour que l'intégrale converge il faut et il suffit  $m - 2n < -1$ . S'agissant d'entier, cela donne  $m - 2n \leq -2$ .
- Si  $m$  est impair la fonction intégrande est impaire et un changement de variable  $x \mapsto -x$  montre que les intégrales sur tout intervalle de la forme  $[-M, M]$  s'annulent. L'intégrale sur  $\mathbb{R}$  aussi, donc.
- A l'aide du théorème des résidus on sait qu'on peut voir l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  comme la limite, lorsque  $R \rightarrow \infty$ , de l'intégrale de la fonction  $f(z) := z^m/(1+z^{2n})$  sur le lacet  $\gamma_R$  donné par  $\gamma_R(t) = t$  pour  $t \in [-R, R]$  et  $\gamma_R(t) = Re^{i(t-R)}$  pour  $t \in [R, R + \pi]$ . Cette intégrale peut se calculer par la formule des résidus et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^m}{1+x^{2n}} dx = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a),$$

où  $A$  est l'ensemble des pôles de  $f$  ayant partie imaginaire positive. Ces pôles sont ceux de la forme  $a_k = e^{i\pi \frac{k}{2n}}$  pour  $k$  impair et  $0 < k < 2n$  (donc  $k = 2h + 1$  pour  $h = 0, \dots, n-1$ ). Ils sont tous des pôles simples. On peut donc calculer les résidus par la formule qui s'applique à un pôle simple  $a$  d'une fraction  $g/h$ , qui donne  $g(a)/h'(a)$ . Ici on a  $g(z) = z^m$  et  $h(z) = 1 + z^{2n}$  donc  $h'(z) = 2nz^{2n-1}$ . On a donc

$$\text{Res}(f, a_k) = \frac{1}{2n} a_k^{-(2n-1-m)}.$$

Ceci donne la formule générale pour  $I_{m,n}$  (dernière question)

$$I_{m,n} = \frac{\pi i}{n} \sum_{h=0}^{n-1} e^{-i\pi \frac{(2h+1)(2n-1-m)}{2n}}.$$

Dans le cas  $n = 2$  les pôles en question sont

$$a_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad a_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Pour calculer  $I_{2,2}$  on a donc

$$I_{2,2} = \frac{\pi i}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{1+i} + \frac{\sqrt{2}}{-1+i} \right) = \frac{\pi i}{2} \left( \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} - \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} \right) = \frac{\pi i}{2} \frac{-2\sqrt{2}i}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Il nous reste à calculer  $I_{2,3}$ . Dans ce cas là on a  $2n - 1 - m = 3$ , donc on trouve

$$I_{2,3} = \frac{\pi i}{3} \sum_{h=0}^2 e^{-i\frac{\pi}{2}(2h+1)} = \frac{\pi i}{3} \left( e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{-3i\frac{\pi}{2}} + e^{-5i\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi i}{3} (-i) = \frac{\pi}{3},$$

où on a utilisé  $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-5i\frac{\pi}{2}} = -i$  et  $e^{-3i\frac{\pi}{2}} = i$ .