Université Claude Bernard Lyon 1 2016-2017

Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours ≪Mathématiques générales et applications≫
Calcul différentiel et analyse complexe
Examen partiel
Vendredi 10 mars 2017 – Durée : 2h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1.

a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.

Soient p,q deux entiers tels que $p,q \geq 1$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Montrer que f est bien définie.

c) Déterminer les valeurs de p et q pour lesquelles la fonction f est continue en $(0,0)$.

d) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$ et montrer que si f est différentiable en $(0,0)$, alors la différentielle de f en ce point est nulle.

e) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que toutes les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ existent et les calculer.

f) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $p+q > 3$.

Exercice 2. On définit

$$E = \{y : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^1,\ y(1) = 0\}, \qquad N(y) = \sup_{x\in[0,1]} |y'(x)|$$

et

$$F = \{z : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}, \qquad \|z\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |z(x)|$$

a) Soit $z \in F$. Montrer qu'il existe exactement un $y \in E$ tel que $y' = z$ et le déterminer explicitement.

b) Montrer que N est une norme sur E.

c) Montrer que $\forall y \in E$, $\|y\|_\infty \leq N(y)$.

d) On munit l'espace E de la norme N. Montrer que l'application $f : E \to F$, $f(y) = -y' + y^3$ est continue.

e) Déterminer les dérivées directionnelles de f, si elles existent.

f) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3. On considère l'ensemble

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^4 + y^3 - y^2 + x^2 - y = 0\}.$$

a) Montrer qu'il existe I et J deux voisinages de 0 et une fonction $g : I \to J$ de classe C^1 tels que :

$$x \in I,\ y \in J,\ (x,y) \in C \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x).$$

b) Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

c) Montrer que la fonction g est de classe C^2 au voisinage de 0 et calculer $g''(0)$.

d) Montrer qu'au voisinage de l'origine l'ensemble C est une courbe paramétrée de classe C^2. Le point $(0,0)$ est-il bi-régulier ?

Exercice 4.

a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^2 z^n$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\frac{1}{4}}}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} e^n z^{n^3}$.

b) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est infini.