# Calcul Différentiel et Analyse Complexe
# –
# Questions pour un QCM

**Exercice 1.** En quatre versions

**Version 1**

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^4 + y^3 - xy - 61$ et l'ensemble $E := \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$. Au voisinage du point $(1,4)$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire l'ensemble $E$ comme le graphe d'une fonction $C^1$ ?

- oui, pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ mais pas $x = \phi(y)$ (BONNE)
- oui, pour avoir un graphe du type $x = \phi(y)$ mais pas $y = \phi(x)$
- oui, tant pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ que du type $x = \phi(y)$
- non

**Version 2**

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^4 + y^3 - xy - 79$ et l'ensemble $E := \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$. Au voisinage du point $(3,1)$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire l'ensemble $E$ comme le graphe d'une fonction $C^1$ ?

- oui, pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ mais pas $x = \phi(y)$
- oui, pour avoir un graphe du type $x = \phi(y)$ mais pas $y = \phi(x)$ (BONNE)
- oui, tant pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ que du type $x = \phi(y)$
- non

**Version 3**

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^4 + y^3 - xy - 1$ et l'ensemble $E := \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$. Au voisinage du point $(1,1)$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire l'ensemble $E$ comme le graphe d'une fonction $C^1$ ?

- oui, pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ mais pas $x = \phi(y)$
- oui, pour avoir un graphe du type $x = \phi(y)$ mais pas $y = \phi(x)$
- oui, tant pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ que du type $x = \phi(y)$ (BONNE)
- non

**Version 4**

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^4 + y^3 - xy$ et l'ensemble $E := \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$. Au voisinage du point $(0,0)$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire l'ensemble $E$ comme le graphe d'une fonction $C^1$ ?

- oui, pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ mais pas $x = \phi(y)$
- oui, pour avoir un graphe du type $x = \phi(y)$ mais pas $y = \phi(x)$
- oui, tant pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ que du type $x = \phi(y)$
- non (BONNE)

**Corrigé**

On peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour obtenir $y = \phi(x)$ si $\partial f/\partial y \neq 0$ et pour obtenir $x = \phi(y)$ si $\partial f/\partial x \neq 0$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - x.$$

Dans les quatre points qui nous intéressent on a la situation suivante : dans la V3 les deux dérivées partielles sont non nulles ; dans V1 et la V2 une seule ; dans la V4 aucune.

**Exercice 2.** En quatre versions

**Version 1**

Soit $k$ un entier strictement positif et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1$, et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la courbe donnée par $\gamma(t) = e^{ikt}h(t)$. Une seule parmi les affirmations suivantes est toujours vraie : laquelle ?

— Si $k = 1$ et $h$ ne s'annule pas alors $\gamma$ est forcement injective sur $[0, 2\pi[$. (BONNE)
— La longueur de $\gamma$ est égale à $\int_0^{2\pi} \sqrt{h^2(t) + k^2h'(t)^2}dt$.
— $\gamma$ est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si $h(t) = \cos(kt)$.
— La longueur de $\gamma$ vaut au plus $k \int_0^{2\pi} |h'(t)|dt$.

**Version 2**

Soit $k$ un entier strictement positif et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1$, et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la courbe donnée par $\gamma(t) = e^{ikt}h(t)$. Une seule parmi les affirmations suivantes est toujours vraie : laquelle ?

— Si $h$ ne s'annule pas alors $\gamma$ est forcement injective
— La longueur de $\gamma$ est égale à $\int_0^{2\pi} \sqrt{k^2h^2(t) + h'(t)^2}dt$. (BONNE)
— $\gamma$ est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si $h(t) = \cos(kt)$.
— La longueur de $\gamma$ vaut au plus $k \int_0^{2\pi} |h(t)|dt$.

**Version 3**

Soit $k$ un entier strictement positif et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1$, et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la courbe donnée par $\gamma(t) = e^{ikt}h(t)$. Une seule parmi les affirmations suivantes est toujours vraie : laquelle ?

— La longueur de $\gamma$ est égale à $\int_0^{2\pi} \sqrt{k^2h^2(t) + h'(t)^2}dt$. (BONNE)
— La longueur de $\gamma$ est égale à $\int_0^{2\pi} \sqrt{h^2(t) + k^2h'(t)^2}dt$.
— La longueur de $\gamma$ vaut au moins $k^2 \int_0^{2\pi} |h(t)|dt$.
— $\gamma$ est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si $h(t) = \sin(kt)$.

**Version 4**

Soit $k$ un entier strictement positif et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1$, et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la courbe donnée par $\gamma(t) = e^{ikt}h(t)$. Une seule parmi les affirmations suivantes est toujours vraie : laquelle ?

— La longueur de $\gamma$ est égale à $k \int_0^{2\pi} \sqrt{h^2(t) + h'(t)^2}dt$.
— La longueur de $\gamma$ est égale à $\int_0^{2\pi} \sqrt{h^2(t) + k^2h'(t)^2}dt$.
— La longueur de $\gamma$ vaut au moins $k \int_0^{2\pi} |h'(t)|dt$.
— $\gamma$ est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si $k^2h(t)^2 + h'(t)^2 = 1$ pour tout $t$. (BONNE)

**Corrigé**

On calcule $\gamma'(t) = e^{ikt}(ikh(t) + h'(t))$ et $|\gamma'(t)|^2 = k^2h(t)^2 + h'(t)^2$. Cela permet de dire que la courbe est paramérée par longueur d'arc si et seulement si $k^2h(t)^2 + h'(t)^2 = 1$ et de calculer la longueur de $\gamma$ qui vaut $\int_0^{2\pi} \sqrt{k^2h^2(t) + h'(t)^2}dt \geq k \int_0^{2\pi} |h(t)|dt$.

Concernant l'injectivité de $\gamma$, si $k = 1$ l'argument de $\gamma(t)$ (sa direction) change dès qu'on change la valeur de $t \in [0, 2\pi[$ et donc dès que $h$ ne s'annule pas la courbe est injective, mais si $k > 1$ on n'a pas l'injectivité si par exemple on prend $h = 1$.

**Exercice 3.** En quatre versions

**Version 1**

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^{n^2} z^{n^2}$ est

— 2
— 1/2 (BONNE)
— 1
— $+\infty$

**Version 2**

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^{n} z^{3n}$ est

— $2^3$
— $2^{-1/3}$ (BONNE)
— 2
— $+\infty$

**Version 3**

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^{\sqrt{n}} z^{n^2}$ est

— $\sqrt{2}$
— $1/\sqrt{2}$
— 1 (BONNE)
— $+\infty$

**Version 4**

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^{2^n} z^{n}$ est

— $\sqrt{2}$
— $1/\sqrt{2}$
— 0 (BONNE)
— $+\infty$

**Corrigé**

Le rayon de convergence $R$ est donnée par $R^{-1} = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ où les $a_n$ sont les coefficients. Dans V1 et V3, comme on a $z^{n^2}$, la plupart des coefficients sont nuls, et pour les autres il faut calculer $(2^{n^2})^{1/n^2} = 2$ (pour V1), qui tend donc vers 2 et donne $R = 1/2$, ou $(2^{\sqrt{n}})^{1/n^2} \to 2^0 = 1$ et donne $R = 1$. Dans V2 aussi on a des coefficients nuls (pour $n$ non multiplies de trois) et pour les autres il faut calculer $(2^n)^{1/(3n)}$, qui tend vers (en fait, vaut) $2^{1/3}$. On a donc $R = 2^{-1/3}$. Dans V4 on a tous les coefficients, mais $\lim_n (2^{2^n})^{1/n} = 2^{\infty} = \infty$ et donc $R = 0$.

**Exercice 4.** En quatre versions

**Version 1**

Considérer le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{2it}(2 - \sin(3t))$. L'indice $\mathrm{Ind}(0; \gamma)$ vaut

- 0
- 1
- 2 (BONNE)
- n'est pas défini parce que le point appartient à l'image du lacet.

**Version 2**

Considérer le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{2it}(1 + \cos(3t))$. L'indice $\mathrm{Ind}(0; \gamma)$ vaut

- -2
- 0
- 2
- n'est pas défini parce que le point appartient à l'image du lacet. (BONNE)

**Version 3**

Considérer le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{-it}(3 + \sin(2t))$. L'indice $\mathrm{Ind}(e^{i\pi/6}; \gamma)$ vaut

- -1 (BONNE)
- 0
- 1
- n'est pas défini parce que le point appartient à l'image du lacet.

**Version 4**

Considérer le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{2it}(1 + \sin(4t + \pi/2))$. L'indice $\mathrm{Ind}(3; \gamma)$ vaut

- 2
- 0 (BONNE)
- 4
- n'est pas défini parce que le point appartient à l'image du lacet.

## Corrigé

Ces lacets sont tous de la forme $t \mapsto e^{kit}h(t)$ avec $h \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}*$. Cela signifie qu'ils sont parcourue dans le sens direct si $k > 0$ et dans le sens inverse si $k < 0$ et pour les points à l'intérieur du lacet l'indice vaut $k$. Dans V1 on a $h \geq 1$ donc 0 est bien à l'intérieur du lacet. Son indice vaut donc $k$. Dans V2 $h$ peut valoir 0, donc 0 est sur le lacet. Son indice n'est pas défini. Dans V3 et V4 il faut vérifier si le point est à l"intérieur du lacet ou pas. Dans V3 le module du point est inférieur à $\min h$ donc le point est bien dans le lacet et l'indice vaut donc $k = -1$, alors que dans V4 le module est supérieur à $\max h$ et il est donc à l'éextérieur, et son indice vaut 0.

**Exercice 5.** En quatre versions

**Version 1**

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considérer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \alpha z\bar{z} + \beta(z^2 + |z|^2)$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si

- $\alpha, \beta = 0$
- $\alpha + \beta = 0$ (BONNE)
- $\beta = 0$
- $\alpha \in \mathbb{R}$

**Version 2**

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considérer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \alpha(z^3+z^2)+\beta|z|^3$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si

- $\alpha, \beta = 0$
- $\alpha = 0$
- $\beta = 0$ (BONNE)
- $\alpha \in \mathbb{R}$

**Version 3**

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considérer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \alpha z^2 + \beta \mathrm{Re}(z^2)$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si

- $\alpha, \beta = 0$
- $\alpha = 0$
- $\beta = 0$ (BONNE)
- $\alpha = -\beta$

**Version 4** Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considérer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \alpha(\bar{z})^2 + \beta z^2$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si

- $\alpha, \beta = 0$
- $\alpha = 0$ (BONNE)
- $\beta = 0$
- $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$

**Corrigé**

Les fonctions $z \mapsto \mathrm{Re}(z^2), |z|^2, |z|^3, (\bar{z})^2$ ne sont pas holomorphes (on peut s'en convaincre en regardant les conditions de Cauchy-Riemann ou, pour la partie réelle et le module au carré, en remarquant que c'est des fonctions non-constantes dont l'image n'est pas un ouvert). Par contre touts les autres fonctions qui apparaissent sont des polynômes et sont donc holomorphes. La seule possibilité pour obtenir une fonction holomorphe est annuler le coefficient de la partie qui contient un terme non-holomorphe. Attention, dans V1 il faut faire attention au fait que $z\bar{z} = |z|^2$ donc il faut réécrire la fonction comme $(\alpha + \beta)|z|^2 + \beta z^2$. Tout cela permet de trouver les réponses cherchées.

**Exercice 6.** En quatre versions

**Version 1**

Soit $\gamma$ un chemin d'origine $i$ et d'extrémité 1 et ne passant pas par le point 0. Combien vaut $\int_\gamma z^{-2}dz$ ?

— 0
— $-(1+i)$ (BONNE)
— $-z^{-1}$
— Cela dépend du fait que $\gamma$ passe d'un côté ou l'autre de l'origine.

**Version 2**

Soit $\gamma$ un chemin d'origine $-i$ et d'extrémité $i$ et ne passant pas par le point 0. Combien vaut $\int_\gamma z^{-2}dz$ ?

— 0
— $2i$ (BONNE)
— 2
— Cela dépend du fait que $\gamma$ passe d'un côté ou l'autre de l'origine.

**Version 3**

Soit $\gamma$ un chemin d'origine 2 et d'extrémité $i$ et ne passant pas par le point 1. Combien vaut $\int_\gamma (z-1)^{-2}dz$ ?

— 0
— $(3+i)/2$ (BONNE)
— $i-2$
— Cela dépend du fait que $\gamma$ passe d'un côté ou l'autre du point 1.

**Version 4**

Soit $\gamma$ un chemin dans le plan complexe d'origine 2 et d'extrémité $1+i$ et ne passant pas par le point 1. Combien vaut $\int_\gamma (z-1)^{-2}dz$ ?

— 0
— $(3+i)/2$
— $1+i$ (BONNE)
— Cela dépend du fait que $\gamma$ passe d'un côté ou l'autre du point 1.

**Corrigé**

La fonction $f(z) = z^{-2}$ admet une primitive $F(z) = -1/z$, définie en déhors de l'origine. A condition que le chemin ne passe pas par le seul point où la fonction et sa primitive ne sont pas définies, il suffit de calculer $F($ extrémité$) - F($origine$)$ et le résultat ne dépend pas du chemin. Pour la fonction $f(z) = (z-1)^{-2}$, la primitve est donnée par $F(z) = -1/(z-1)$.

**Exercice 7.** En quatre versions

**Version 1**

La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)z^{2n}$ converge sur $B(0,1)$ et sur cette boule vaut

— $\frac{1}{(1-z)^3}$

— $\frac{z^2}{(1-z)^2}$

— $\frac{2}{(1-z^2)^3}$ (BONNE)

— $\frac{(n+2)(n+1)}{1-z^2}$

**Version 2**

La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)z^{3n}$ converge sur $B(0,1)$ et sur cette boule vaut

— $\frac{z}{(1-z^3)^3}$

— $\frac{2}{1-z^9}$

— $\frac{n+3}{1-z^3}$

— $\frac{2}{(1-z^3)^3}$ (BONNE)

**Version 3** La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)z^{2n+1}$ converge sur $B(0,1)$ et sur cette boule vaut

— $\frac{2z}{(1-z)^6}$

— $\frac{2}{1-z^6}$

— $\frac{2z}{(1-z^2)^3}$ (BONNE)

— $\frac{2n+1}{1-z^6}$

**Version 4**

La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)z^{3n+2}$ converge sur $B(0,1)$ et sur cette boule vaut

— $\frac{2}{(1-z^3)^3}$

— $\frac{z}{1-z^3}$

— $\frac{n+3}{1-z^9}$

— $\frac{2z^2}{(1-z^3)^3}$ (BONNE)

**Corrigé**

Tout d'abord on calcule $\sum_{n\geq 0} z^n = 1/(1-z)$ et $\sum_{n\geq 0} z^{n+2} = \sum_{n\geq 2} z^n = 1/(1-z) - 1 - z$. En dérivant deux fois, on a

$$S(z) := \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)z^n = \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z} - 1 - z\right) = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

On observe que dans V1 il faut calculer $S(z^2)$, dans V2 on a $S(z^3)$, dans V3 on a $zS(z^2)$, et dans V4 on a $z^2S(z^3)$, ce qui donne les formules cherchées.

**Exercice 8.** En quatre versions

**Version 1**

Toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $e^z = 8$ sont

— $z = \mathbf{3}\ln\mathbf{2}$
— $z = \mathbf{3}\ln\mathbf{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
— $z = \mathbf{3}\ln\mathbf{2} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ (BONNE)
— $z = \mathbf{3}\ln\mathbf{2} + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

**Version 2**

Toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $e^z = i$ sont

— $z = i\pi$
— $z = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ (BONNE)
— $z = i\pi + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
— $z = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

**Version 3**

Toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $e^z = -1$ sont

— $z = i\pi$
— $z = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
— $z = -i\pi + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ (BONNE)
— $z = i\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

**Version 4**

Toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $e^z = 1 + i$ sont

— $z = (\ln\mathbf{2})/\mathbf{2} + \frac{i\pi}{4}$
— $z = (\ln\mathbf{2})/\mathbf{2} + \frac{i\pi}{4} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ (BONNE)
— $z = (\ln\mathbf{2})/\mathbf{2} - \frac{i\pi}{4} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
— $z = (\ln\mathbf{2})/\mathbf{2} + \frac{i\pi}{4} + 4k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

**Corrigé**

Toutes les solutions de $e^z = 1$ sont $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc toutes les solutions de $e^z = a$ sont $z = z_0 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, où $z_0$ est une solution particulière. Pour la V1, $2\ln 2$ est solution particulière, donc la solution générale est $z = 3\ln 2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. De même pour les autres versions.

**Exercice 9.** En quatre versions

### Version 1

On désigne par $f(z)$ une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\{it\ ;\ t\in\mathbb{R}_+\}$ telle que $f(-i)=-i\frac{\pi}{2}$. On a que $f(i-1)$ vaut

- $0$
- $(\ln \mathbf{2})/\mathbf{2} - i\frac{5\pi}{4}$ (BONNE)
- $-i\frac{5\pi}{4}$
- $(\ln \mathbf{2})/\mathbf{2} + i\frac{3\pi}{4}$

### Version 2

On désigne par $f(z)$ une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\{it\ ;\ t\in\mathbb{R}_-\}$ telle que $f(i)=i\frac{\pi}{2}$. On a que $f(1-i)$ vaut

- $0$
- $-i\frac{\pi}{4}$
- $(\ln \mathbf{2})/\mathbf{2} + i\frac{7\pi}{4}$
- $(\ln \mathbf{2})/\mathbf{2} - i\frac{\pi}{4}$ (BONNE)

### Version 3

On désigne par $f(z)$ une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ telle que $f(i)=-i\frac{3\pi}{2}$. On a que $f(-1-i)$ vaut

- $0$
- $-i\frac{\pi}{4}$
- $(\ln \mathbf{2})/\mathbf{2} + i\frac{5\pi}{4}$
- $(\ln \mathbf{2})/\mathbf{2} - i\frac{3\pi}{4}$ (BONNE)

### Version 4

On désigne par $f(z)$ une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ telle que $f(-i)=i\frac{3\pi}{2}$. On a que $f(i+1)$ vaut

- $0$
- $(\ln \mathbf{2})/\mathbf{2} + i\frac{9\pi}{4}$ (BONNE)
- $(\ln \mathbf{2})/\mathbf{2} + i\frac{\pi}{4}$
- $i\frac{\pi}{4}$

### Corrigé

On a toujours $\log z=\ln|z|+i\arg z$ quelle que soit la détermination du logarithme. Le problème est de trouver la bonne valeur de l'argument. Dans la V1 il faut éviter la demi-droite $\{it\ ;\ t\in\mathbb{R}_+\}$, donc l'argument doit être pris dans $]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}[$, ou dans $]-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ou toute translation de $2\pi$ de ces intervalles. Comme $f(-i)=-\frac{\pi}{2}$ il faut prendre l'intervalle qui contient $-\frac{\pi}{2}$. Il faut donc prendre l'argument dans l'intervalle $]-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. On a donc que $f(i-1)=(\ln 2)/2-i\frac{5\pi}{4}$. De même pour les autres versions.

**Exercice 10.** En quatre versions

**Version 1** Laquelle des fonctions suivantes est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 :

— $f(z) = \overline{z}$
— $f(z) = \overline{z}^2$ (BONNE)
— $f(z) = \overline{z}^2/z$
— $f(z) = \overline{z}/z$

**Version 2** Laquelle des fonctions suivantes est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 :

— $f(z) = |z|$
— $f(z) = |z|^2/z$
— $f(z) = |z|^2$ (BONNE)
— $f(z) = |z|/z$

**Version 3** Laquelle des fonctions suivantes est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 :

— $f(z) = (z+\overline{z})^2$ (BONNE)
— $f(z) = z+\overline{z}$
— $f(z) = (z+\overline{z})^2/z$
— $f(z) = (z+\overline{z})/z$

**Version 4** Laquelle des fonctions suivantes est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 :

— $f(z) = z-\overline{z}$
— $f(z) = (z-\overline{z})^2/z$
— $f(z) = (z-\overline{z})/z$
— $f(z) = (z-\overline{z})^2$ (BONNE)

**Corrigé**

Pour la V1 :

a) $f(z) = \overline{z}$

b) $f(z) = \overline{z}^2$

c) $f(z) = \overline{z}^2/z$

d) $f(z) = \overline{z}/z$

La fonction de d) n'est pas continue en 0, donc elle n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable. Dans les autres cas $f(0) = 0$, il faut donc voir si $f(z)/z$ admet une limite en 0. Comme $\overline{z}/z$ n'a pas de limite en 0, seul b) convient : $\overline{z}^2/z$ tend vers 0 quand $z \to 0$.

De même pour les autres versions.

**Exercice 11.** En quatre versions

**Version 1**

Soit $\gamma$ le segment orienté qui va de $\frac{\pi}{2}$ à $i\pi$ dans cet ordre. La valeur de l'intégrale $\int_\gamma \sin(z)dz$ est :

— $0$
— $\frac{e^\pi+e^{-\pi}}{2}$
— $\sin(i\pi)-\sin(\pi/2)$
— $-\frac{e^\pi+e^{-\pi}}{2}$ (BONNE)

**Version 2**

Soit $\gamma$ le segment orienté qui va de $\pi$ à $i\frac{\pi}{2}$ dans cet ordre. La valeur de l'intégrale $\int_\gamma \cos(z)dz$ est :

— $0$
— $\cos(i\pi/2)-\cos(\pi)$
— $\frac{e^{-\pi/2}-e^{\pi/2}}{2i}$ (BONNE)
— $\frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{2i}$

**Version 3**

Soit $\gamma$ le segment orienté qui va de $\frac{\pi}{2}$ à $i\pi$ dans cet ordre. La valeur de l'intégrale $\int_\gamma \cos(z)dz$ est :

— $0$
— $\cos(i\pi)-\cos(\pi/2)$
— $\frac{e^\pi-e^{-\pi}}{2i}+1$
— $\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2i}-1$ (BONNE)

**Version 4**

Soit $\gamma$ le segment orienté qui va de $\pi$ à $i\frac{\pi}{2}$ dans cet ordre. La valeur de l'intégrale $\int_\gamma \sin(z)dz$ est :

— $0$
— $-\frac{e^{-\pi/2}+e^{\pi/2}}{2}-1$ (BONNE)
— $\frac{e^{-\pi/2}+e^{\pi/2}}{2}+1$
— $\sin(i\pi/2)-\sin(\pi)$

**Corrigé**

Pour la V1 : le sin admet comme primitive $-\cos$ et $\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$ donc

$$\int_\gamma \sin(z)\,dz = -\int_\gamma \cos'(z)\,dz = -(\cos(i\pi)-\cos(\pi/2)) = -\cos(i\pi) = -\frac{e^\pi+e^{-\pi}}{2}$$

De même pour les autres versions.

**Exercice 12.** En quatre versions

**Version 1**

Soit $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x+1)^3 + (y+1)^4 = 2\}$. L'équation de la tangente à la courbe $\gamma$ en l'origine est :

— $3x + 4y = 2$
— $3x + 4y = 0$ (BONNE)
— $-4x + 3y = 2$
— $-4x + 3y = 0$

**Version 2** Soit $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x+1)^4 + (y+1)^3 = 2\}$. L'équation de la tangente à la courbe $\gamma$ en l'origine est :

— $4x + 3y = 2$
— $-3x + 4y = 2$
— $-3x + 4y = 0$
— $4x + 3y = 0$ (BONNE)

**Version 3**

Soit $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x+1)^2 + (y+1)^3 = 2\}$. L'équation de la tangente à la courbe $\gamma$ en l'origine est :

— $2x + 3y = 2$
— $-3x + 2y = 2$
— $2x + 3y = 0$ (BONNE)
— $-3x + 2y = 0$

**Version 4**

Soit $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x+1)^3 + (y+1)^2 = 2\}$. L'équation de la tangente à la courbe $\gamma$ en l'origine est :

— $-2x + 3y = 2$
— $3x + 2y = 2$
— $-2x + 3y = 0$
— $3x + 2y = 0$ (BONNE)

**Corrigé**

La normale à la courbe $\{f(x,y) = 0\}$ est $\nabla f(x,y)$.

Pour la V1, $f(x,y) = (x+1)^3 + (y+1)^4 - 2$ donc la normale à la courbe en l'origine est $\nabla f(0,0) = (3,4)$. Un point $(x,y)$ appartient à la tangente à la courbe en l'origine si et seulement si $(x,y) - (0,0) \perp (3,4)$ c'est-à-dire si $3x + 4y = 0$.

De même pour les autres versions.

**Exercice 13.** En quatre versions

### Version 1

On note $z = x + iy$. En quels points de $\mathbb{C}$ la fonction $f(z) = x^3$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

- Aucun.
- Seulement en 0.
- Sur la droite $x = 0$ (BONNE)
- Sur la droite $y = 0$

### Version 2

On note $z = x + iy$. En quels points de $\mathbb{C}$ la fonction $f(z) = y^3$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

- Aucun.
- Seulement en 0.
- Sur la droite $x = 0$
- Sur la droite $y = 0$ (BONNE)

### Version 3

En quels points de $\mathbb{C}$ la fonction $f(z) = |z|^2$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

- Aucun.
- Seulement en 0. (BONNE)
- Sur la droite $x = 0$.
- Sur la droite $y = 0$.

### Version 4

En quels points de $\mathbb{C}$ la fonction $f(z) = \overline{z}^2$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

- Aucun.
- Seulement en 0. (BONNE)
- Sur la droite $x = 0$.
- Sur la droite $y = 0$.

### Corrigé

Pour la V1, $f = P + iQ$ avec $P(x, y) = x^3$ et $Q(x, y) = 0$. Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

De même pour les autres versions.