Calcul différentiel et analyse complexe
Examen terminal – Mardi 24 mai 2022 – Durée : 3h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.
Rédigez les exercices 1 et 2 sur une copie et les exercices 3, 4 et 5 sur une autre copie.

Exercice 1. (5 points) Soit $E = C^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la norme du sup et $T_1, T_2 : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions ainsi définies

$$T_1(f) := \int_0^1 f(t)^2 dt; \quad T_2(f) := \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2.$$

Prouver que les deux fonctions sont différentiables en tout point $f \in E$ et déterminer tous les points f où les différentielles $DT_1(f)$ et $DT_2(f)$ sont la même application linéaire.

Correction. *Notons par $\|\cdot\|$ la norme sup sur $[0,1]$. Pour $f, g \in E$ on a :*

$$T_1(f+g) - T_1(f) = 2\int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 g^2(t)dt.$$

Comme $|\int_0^1 g^2(t)dt| \leq \|g\|^2$, on a $\int_0^1 g^2(t)dt = o(\|g\|)$. Du coup le candidat pour $DT_1(f)$ est donné par

$$g \mapsto 2\int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Comme nous sommes en dimension infinie, il reste à prouver la continuité de cette application (qui est clairement linéaire). Celle-ci est vraie car :

$$|2\int_0^1 f(t)g(t)dt| \leq (2\|f\|)\|g\|.$$

Donc on a bien :

$$DT_1(f) : \ g \mapsto 2\int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

D'autre part, pour $f, g \in E$ on a :

$$T_2(f+g) - T_2(f) = 2\int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt + \left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2.$$

De même que précédemment nous prouvons que T_2 est différentiable et on a :

$$DT_2(f) : \ g \mapsto 2\int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt.$$

Pour finir, clairement $DT_1(f) \equiv DT_2(f)$ si f constante. Réciproquement, pour prouver qu'il s'agit d'une condition nécessaire, $DT_1(f) \equiv DT_2(f)$ implique que $DT_1(f)(f) = DT_2(f)(f)$ ce qui est exactement le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz, qui est vérifié seulement par les constantes.

Exercice 2. (6 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) := x + x^3 + y^2 + xy$$

et $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des points où cette fonction s'annule.

a) Prouver qu'en tout point de Γ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire localement Γ comme un graphe : on peut exprimer ou bien y comme fonction de x ou bien x comme fonction de y.

b) Prouver que l'origine appartient Γ et qu'en ce point on peut localement écrire Γ comme graphe d'une fonction $x = \varphi(y)$.

c) Dans le même voisinage écrire Γ comme image d'une courbe parametrée régulière et déterminer un vecteur tangent et la courbure de cette courbe en l'origine.

Correction. *a) On a f de classe C^∞ car polynomiale ; on calcule $\nabla f(x,y) = (1+3x^2+y,\ 2y+x)$. Du coup, après un calcul on obtient que $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si et seulement si $x^2 - x/6 + 1/3 = 0$ et $y = -x/2$.*
En calculant le discriminant de $X^2 - X/6 + 1/3$, on voit qu'il n'y a pas de racine réelle. Par conséquent, ∇f n'est jamais nul (ni sur Γ ni nulle part ailleurs...) et en tout point de Γ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites par rapport à l'une des coordonnées.

b) Clairement, $(0,0) \in \Gamma$. On a $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Comme $\partial f/\partial x(0,0)$ n'est pas nulle, on peut utiliser le théorème des fonctions implicites par rapport à la coordonnée y. Il existe donc une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et, au voisinage de l'origine, $f(x,y) = 0$ si et seulement si $x = \varphi(y)$.

c) La courbe Γ est paramétrée au voisinage de l'origine par $\gamma(t) = (\varphi(t), t)$. On écrit

$$f(\varphi(t),t) = \varphi + \varphi^3 + t^2 + t\varphi = 0.$$

On dérive une fois, puis deux fois par rapport à t et on trouve

$$\varphi' + 3\varphi'\varphi^2 + 2t + t\varphi' + \varphi = 0 \quad \textit{et} \quad \varphi'' + 3\varphi''\varphi^2 + 6\varphi'^2\varphi + 2 + t\varphi'' + 2\varphi' = 0.$$

En posant $t = 0$ au-dessus on trouve $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) = -2$.

On a donc d'une part un vecteur tangent en l'origine donné par

$$\gamma'(0) = (0,1)$$

et d'autre part

$$\gamma''(0) = (-2,0).$$

La courbure de Γ en 0 est donnée par :

$$\frac{|\gamma'(0) \wedge \gamma''(0)|}{|\gamma'(0)|^3} = 2.$$

Exercice 3. (4 points) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} e^n n z^n$. En quels points du bord du disque de convergence la série converge-t-elle ?

Correction. *Le rayon de convergence de la série est égal à e^{-1} ; cela découle facilement du critère de Cauchy, de celui de D'Alembert, ou même de la définition du rayon de convergence.*
A l'intérieur du disque de convergence on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^n n z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} e^n n z^{n-1} = z\frac{d}{dz}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(ez)^n\Big) = z\frac{d}{dz}\Big(\frac{ez}{1-ez}\Big) = \frac{ez}{(1-ez)^2}.$$

Pour finir, la série diverge grossièrement partout sur le bord du disque de convergence car on y a $|e^n n z^n| = n$.

Exercice 4. (4 points) Soit γ la courbe suivante orientée dans le sens direct : $\gamma = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z\bar{z} = z + \bar{z}\}$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz.$$

Correction. *On commence par identifier γ avec le cercle de centre 1 et de rayon 1 donné par :*

$$|z-1|^2 = (z-1)(\overline{z-1}) = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 1.$$

On a donc, si l'on note

$$f : z \mapsto \frac{e^z}{(z-1)^3},$$

en remarquant que f a un seul pôle en 1, l'égalité

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\, Ind(\gamma,1) Res_\gamma(1) = 2\pi i\, Res_\gamma(1).$$

Reste à calculer le résidu ; on peut le faire directement en utilisant le développement de l'exponentielle au voisinage de 1 :

$$\frac{e^z}{(z-1)^3} = e\sum_{k=-3}^{+\infty}\frac{(z-1)^k}{(k+3)!};$$

le coefficient devant $(z-1)^{-1}$ vaut $e/2$. Du coup :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i e/2 = \pi i e.$$

Alternatives :
- *On peut appliquer directement la formule de Cauchy (Théorème 4.27 du cours).*
- *On peut calculer le résidu en remarquant qu'il s'agit d'un pôle de degré 3 et appliquer la formule du cours.*

Exercice 5. (6 points) Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité D telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$. On suppose de plus qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que $|f'(z)| \leq M$ pour tout $z \in D$.

a) Montrer que $|f'(z)-1| \leq (M+1)|z|$ pour tout $z \in D$. (Indication : utiliser le lemme de Schwarz.)

b) Montrer que
$$|f(z)-z| \leq \frac{M+1}{2}|z|^2$$
pour tout $z \in D$.

On note $D_1 = D\Big(0, \dfrac{1}{M+1}\Big)$ et $D_2 = D\Big(0, \dfrac{1}{2(M+1)}\Big)$.

c) Montrer que pour tout $a \in D_2$, l'équation $f(z)=a$ admet exactement une solution z_a dans D_1. (Indication : utiliser le théorème de Rouché.)

d) Montrer que l'application $a \mapsto z_a$ est holomorphe sur D_2.

Correction. *a) La fonction*
$$z \mapsto \frac{f'(z)-1}{M+1}$$
est holomorphe de D dans lui-même donc par le lemme de Schwarz on a bien :
$$|f'(z)-1| \leq (M+1)|z|, \ \forall z \in D.$$

b) Le cas $z=0$ est évident. Sinon, on intègre sur le segment $[0,z]$:
$$f(z)-z = f(0)-0+\int_{[0,z]}(f(\xi)-\xi)'d\xi = \int_{[0,z]}(f'(\xi)-1)d\xi = \int_0^1 (f'(sz)-1)zds,$$
où on a utilisé la paramétrisation $s \in [0,1] \mapsto sz$ du segment $[0,z]$ pour obtenir la dernière inégalité. On prend la valeur absolue :
$$|f(z)-z| \leq |z|\int_0^1 |f'(sz)-1|ds.$$
Pour finir, on utilise la question précédente :
$$|f(z)-z| \leq |z|\int_0^1 (M+1)s|z|ds = (M+1)|z|^2\int_0^1 sds = (M+1)|z|^2/2.$$

c) On peut appliquer le théorème de Rouché sur D_1 aux fonctions z et $f(z)-a$. En effet, d'après la question précédente, si $z \in \partial D_1$:
$$|z-(f(z)-a)| \leq |f(z)-z|+|a| \leq (M+1)|z|^2/2+|a| = \frac{1}{2(M+1)}+|a| < \frac{1}{M+1} = |z|.$$
Donc dans D_1, la fonction
$$z \mapsto f(z)-a$$
a autant de zéros avec multiplicité que l'identité, c'est-à-dire un seul.

d) La fonction f étant continue et D_2 étant ouvert, $f^{-1}(D_2)\cap D_1 =: \Omega$ est un ouvert. La question c) signifie exactement que f est une bijection holomorphe de Ω dans D_2, d'inverse $a \mapsto z_a$. Par le théorème d'inversion globale pour les fonctions holomorphes, f est un biholomorphisme de Ω dans D_2. Son inverse, $a \mapsto z_a$, est donc holomorphe.