Calcul différentiel et analyse complexe
Examen terminal – Mardi 24 mai 2022 – Durée : 3h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. (4 points) Soit $E = C^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la norme du sup et $T_1, T_2 : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions ainsi définies

$$T_1(f) := \int_0^1 f(t)^2 dt; \quad T_2(f) := \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2.$$

Prouver que les deux fonctions sont différentiables en tout point $f \in E$ et déterminer tous les points f où les différentielles $DT_1(f)$ et $DT_2(f)$ sont la même application linéaire.

Exercice 2. (6 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) := x + x^3 + y^2 + xy$$

et $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des points où cette fonction s'annule.

a) Prouver qu'en tout point de Γ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire localement Γ comme un graphe : on peut exprimer ou bien y comme fonction de x ou bien x comme fonction de y.

b) Prouver que l'origine appartient Γ et qu'en ce point on peut localement écrire Γ comme graphe d'une fonction $x = \varphi(y)$.

c) Dans le même voisinage écrire Γ comme image d'une courbe parametrée régulière et déterminer un vecteur tangent et la courbure de cette courbe en l'origine.

Exercice 3. (4 points) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} e^n n z^n$. En quels points du bord du disque de convergence la série converge-t-elle ?

Exercice 4. (5 points) Soit γ la courbe suivante orientée dans le sens direct : $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \,;\, z\bar{z} = z + \bar{z}\}$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^3}\, dz.$$

Exercice 5. (6 points) Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité D telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On suppose de plus qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que $|f'(z)| \leq M$ pour tout $z \in D$.

a) Montrer que $|f'(z) - 1| \leq (M+1)|z|$ pour tout $z \in D$. (Indication : utiliser le lemme de Schwarz.)

b) Montrer que

$$|f(z) - z| \leq \frac{M+1}{2}|z|^2$$

pour tout $z \in D$.

On note $D_1 = D\left(0, \frac{1}{M+1}\right)$ et $D_2 = D\left(0, \frac{1}{2(M+1)}\right)$.

c) Montrer que pour tout $a \in D_2$, l'équation $f(z) = a$ admet exactement une solution z_a dans D_1. (Indication : utiliser le théorème de Rouché.)

d) Montrer que l'application $a \mapsto z_a$ est holomorphe sur D_2.