Corrigé

Exercice 1 : a) Une suite convergente est bornée donc c_0 est un s.e.v. de ℓ^∞. Il reste à montrer que c_0 est fermé ds ℓ^∞.

Soit $x^K \in c_0$, $x \in \ell^\infty$ tels que $x^K \xrightarrow{K\to\infty} x$ ds ℓ^∞

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe p tel que $\|x^p - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \quad \forall n, \ |x^p_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $x^p \in c_0 \Rightarrow x^p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \exists N$ tel que

$|x^p_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$.

D'où $|x_n| = |x_n - x^p_n + x^p_n| \leq |x_n - x^p_n| + |x^p_n|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

Donc $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $x \in c_0$. Donc c_0 fermé.

b) On a $\sum_n |\alpha_n x_n| \leq \sum_n |\alpha_n| \sup |x_n|$

$$= \|\alpha\|_1 \ \|x\|_\infty$$

donc $T_\alpha(x)$ est bien défini et $|T_\alpha(x)| \leq \|\alpha\|_1 \|x\|_\infty$

T_α est clairement linéaire, donc T_α cont et

$\boxed{\|T_\alpha\| \leq \|\alpha\|_1}$

Soit $x^N = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in c_0$

où $x_j = \text{signe}(\alpha_j)$.

Alors $\|x^N\|_\infty \leq 1$ et

$$T_\alpha(x^N) = \alpha_0 \text{ signe}(\alpha_0) + \dots + \alpha_N \text{ signe}(\alpha_N)$$
$$= |\alpha_0| + \dots + |\alpha_N|$$

Or $|T_\alpha(x^N)| \leq \|T_\alpha\| \, \|x^N\|_\infty$

$$\Rightarrow \quad |\alpha_0| + \dots + |\alpha_N| \leq \|T_\alpha\|$$

En faisant $N \to \infty$ on obtient $\boxed{\|\alpha\|_1 \leq \|T_\alpha\|}$

On obtient bien $\|T_\alpha\| = \|\alpha\|_1$.

c) i) On a

$$S(\text{signe}(\alpha_0), \dots, \text{signe}(\alpha_N), 0, \dots)$$
$$= S(\text{signe}(\alpha_0) e_0 + \dots + \text{signe}(\alpha_N) e_N)$$
$$= \text{signe}(\alpha_0) S(e_0) + \dots + \text{signe}(\alpha_N) S(e_N)$$
$$= \text{signe}(\alpha_0) \alpha_0 + \dots + \text{signe}(\alpha_N) \alpha_N$$
$$= |\alpha_0| + \dots + |\alpha_N|$$

ii) On a

$$|\alpha_0| + \dots + |\alpha_N| = S(\text{signe}(\alpha_0), \dots, \text{signe}(\alpha_N), 0, 0, \dots)$$
$$\leq \|S\| \, \|(\text{signe}(\alpha_0), \dots, \text{signe}(\alpha_N), 0, 0, \dots)\|_\infty$$
$$\leq \|S\|$$

c'est vrai pour tout N, donc en faisant $N \to \infty$ on trouve que $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \leq \|S\|$.

③

d) L'applic $\alpha \longrightarrow T\alpha$ est bien définie et isométrique grâce à b). Elle est trivialement linéaire. Il reste à montrer qu'elle est surjective.

Soit $S \in c_0'$ et $\alpha_n = S(e_n)$. On sait par c) que $\alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^1$. Soit $x \in c_0$ et

$x^N = (x_0, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$ la suite des troncatures de x. Alors $x^N \xrightarrow{N\to\infty} x$ ds ℓ^∞ car

$$\|x^N - x\|_\infty = \sup_{k \geq N+1} |x_k| \xrightarrow{N\to\infty} 0 \text{ vu que } x_n \to 0.$$

Or
$$\begin{aligned} S(x^N) &= S(x_0 e_0 + \dots + x_N e_N) \\ &= x_0 S(e_0) + \dots + x_N S(e_N) \\ &= x_0 \alpha_0 + \dots + x_N \alpha_N \\ &= T\alpha(x^N) \end{aligned}$$

Comme $\alpha \in \ell^1$, par b) on sait que $T\alpha \in c_0'$

On a que $S, T\alpha$ cont et

$$S(x^N) = T\alpha(x^N)$$

En faisant $N \to \infty$ on trouve à la limite

$$S(x) = T\alpha(x).$$

Donc $S = T\alpha$ ce qui démontre la surjectivité cherchée.

Exercice 2 :

- T lin : évident
- T cont : On majore par Cauchy-Schwarz :

$$|g(x)| = \left|\int_0^x f\right| \leq \|1\|_{L^2(0,x)} \|f\|_{L^2(0,x)}$$

$$= \sqrt{x}\, \|f\|_{L^2(0,x)}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(0,1)}$$

D'où $\|g\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 |g|^2} \leq \sqrt{\int_0^1 \|f\|^2_{L^2(0,1)}}$

$$= \|f\|_{L^2(0,1)}$$

Donc T cont.

- Calcul de T^*.

En notant $T^*(h) = \varphi$ on doit avoir

$$\langle Tf, h \rangle = \langle f, T^* h \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle g, h \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g(x)\, h(x)\, dx = \int_0^1 f(y)\, \varphi(y)\, dy$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(\int_0^x f(y)\, dy \right) h(x)\, dx = \int_0^1 f(y)\, \varphi(y)\, dy.$$

On applique le théorème de Fubini en s'assurant d'abord qu'on a le droit

$$\int_0^1 \left(\int_0^x |f(y)|\, dy \right) |h(x)|\, dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(y)|\, dy \right) |h(x)|\, dx$$

$$= \int_0^1 |f| \quad \int_0^1 |h| < \infty \quad \text{car } L^2(0,1) \subset L^1(0,1).$$

L'application du th. de Fubini est donc justifiée ce qui donne

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(y)\, dy \right) h(x)\, dx =$$

$$= \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} f(y)\, h(x)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 f(y) \left(\int_y^1 h(x)\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 f(y) \quad \varphi(y)$$

où $\varphi(y) = \int_y^1 h(x)\, dx$

Donc $T^* h(y) = \varphi(y) = \int_y^1 h(x)\, dx.$

Exercice 3 :

a) On utilise 2 fois le résultat du cours qui dit que la dérivée d'une distribution est nulle ssi la distribution est constante. On a :

$$v'' = 0 \iff (v')' = 0 \iff \exists A \in \mathbb{C},\ v' = A$$

$$\iff \exists A \in \mathbb{C},\ (v - Ax)' = 0$$

$$\iff \exists A, B \in \mathbb{C},\ v - Ax = B$$

$$\iff \exists A, B \in \mathbb{C},\ v = Ax + B.$$

b) $$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi$$

$$= \langle 1, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Donc $\hat{\delta} = 1.$

Puis $\widehat{\delta'} = i\xi \hat{\delta} = i\xi$

c) Par bijectivité de la tr. de Fourier sur $\mathcal{S}'$, nous avons :

$$x^2 w = 0 \iff \widehat{x^2 w} = 0 \iff (i\partial_\xi)^2 \hat{w} = 0$$

$$\iff -\hat{w}'' = 0 \iff \hat{w}'' = 0$$

$$\overset{\text{par a)}}{\iff} \hat{w} = A\xi + B,\ A, B \in \mathbb{C}.$$

(6a)

Par b) $\Longleftrightarrow \quad \hat{w} = \widehat{\frac{A}{i}\,\delta'} + B\,\hat{\delta}, \quad A, B \in \mathbb{C}$

$\Longleftrightarrow \quad \hat{w} = \widehat{-iA\delta' + B\delta}, \quad A, B \in \mathbb{C}$

$\Longleftrightarrow \quad w = -iA\,\delta' + B\delta, \quad A, B \in \mathbb{C}$

La solution générale est donc

$$w = A_1\,\delta' + B_1\,\delta, \quad A_1, B_1 \in \mathbb{C}.$$

d) On écrit

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} = \underbrace{\int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}}_{I_2}$$

I_1 est une intégrale convergente car

$$\left| \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} \right| \leq \frac{2\|\varphi\|_{L^\infty}}{x^2} \in L^1(|x|>1)$$

Par imparité $\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{1}{x} = 0$ donc on peut écrire I_2 sous la forme

$$I_2 = \int_{\varepsilon<|x|<1} \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} - \frac{\varphi'(0)}{x} \right)$$

$$= \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,dx$$

Par Taylor, l'intégrande $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}$ est C^∞ y compris en 0, donc

$$I_2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,dx.$$

Donc la limite existe et on a

$$\langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}$$

cette expression est linéaire en φ et on peut majorer

$$\left| \langle Pf(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle \right| \leq \int_{|x|>1} \frac{2 \sup |\varphi|}{x^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)|}{x^2}$$

$$\leq 4 \sup|\varphi| + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \sup|\varphi''|$$

$$\leq 4 P_2(\varphi).$$

Donc $Pf \frac{1}{x^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

e) $\langle x^2 \, Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \langle Pf \frac{1}{x^2}, x^2 \varphi \rangle$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x^2\varphi(x) - 0^2\varphi(0)}{x^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \langle 1, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 \, Pf \frac{1}{x^2} = 1}$$

Puis $x^2 U = 1$

$$\iff x^2 U = x^2 \, Pf \frac{1}{x^2}$$

$$\iff x^2 \left(U - Pf \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\overset{\text{Par c)}}{\iff} U - Pf \frac{1}{x^2} = A_1 \delta' + B_1 \delta,$$

$A_1, B_1 \in \mathbb{C}$

$$\iff U = Pf \frac{1}{x^2} + A_1 \delta' + B_1 \delta, \quad A_1, B_1 \in \mathbb{C}$$

f) On a

$$\langle (vp \tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = - \langle vp \tfrac{1}{x}, \varphi' \rangle$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0))' \frac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{\text{IPP}}} \; - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(- \int_{|x|>\varepsilon} (\varphi(x)-\varphi(0)) \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right.$$

$$\left. + \left.\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|_{\varepsilon}^{\infty} + \left.\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|_{-\infty}^{-\varepsilon} \right)$$

$$= - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} - \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)-2\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

$$= - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)-2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

$$= - \langle \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}, \varphi \rangle$$

où on a utilisé la formule de Taylor pour écrire

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\,\varphi'(0) + o(\varepsilon)$$
$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\,\varphi'(0) + o(\varepsilon)$$

d'où $\dfrac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)-2\varphi(0)}{\varepsilon} = o(1)$.

On a bien $\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)' = -\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}$

g) On utilise que $\widehat{vp\frac{1}{x}} = -i\pi \,\text{signe}(\xi)$ et la question f) pour écrire :

$$\widehat{Pf\frac{1}{x^2}} = -\widehat{\left(vp\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= -i\xi\,\widehat{vp\frac{1}{x}}$$

$$= -i\xi\left(-i\pi\,\text{signe}(\xi)\right)$$

$$= -\pi\,\xi\,\text{signe}(\xi)$$

$$= -\pi|\xi|$$