Université Claude Bernard Lyon 1 2017-2018

Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours ≪Mathématiques pour l'enseignement≫
Approfondissement en analyse
Examen partiel
Lundi 12 mars 2018 – Durée : 1h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Questions de cours.

a) Donner la définition d'un ensemble ouvert.

b) Donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire entre deux espaces normés soit continue.

c) Énoncer le théorème de Riesz.

Exercice 1. Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,dt.$$

a) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que si $0 \leq a, b \leq 1$ alors les normes N_a et N_b sont équivalentes.

c) Soit $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Montrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes. (Indication : prendre $P = X^n$.)

Exercice 2. Soit X l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

a) Soit $T_1 : X \to X$ l'application $f \mapsto T_1(f)$ où $T_1(f)$ est la fonction

$$T_1(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que T_1 est linéaire et continue. Calculer sa norme triple.

b) Soit $T_2 : X \to \mathbb{R}$

$$T_2(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt.$$

Montrer que T_2 est linéaire et continue. Calculer sa norme triple.