Calcul différentiel et analyse complexe

Licence de Mathématiques
Université Lyon 1

Dragoş Iftimie

Table des matières

Mise à jour le 3 mai 2017.

1 Calcul différentiel

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour simplifier la notation, on ne mettra pas d'indice à la norme $\|\cdot\|$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ on utilisera toujours la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. *Soit U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire et continue $L : E \to F$ telle que*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \qquad \text{quand } h \to 0.$$

(On a utilisé la notation habituelle $X = o(\|h\|)$ ssi $\frac{X}{\|h\|} \to 0$ quand $h \to 0$.)

Remarques.

a) Pour pouvoir étudier la différentiabilité d'une fonction en un point il faut que la fonction soit définie au voisinage de ce point.
b) La notion de différentiabilité ne change pas quand on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes.
c) En dimension finie le théorème de Riesz affirme que toutes les normes sont équivalentes. Par conséquent, si E et F sont de dimension finie alors la notion de différentiabilité ne change pas quand on change les normes de E et F.

Proposition 1.2. *L'application linéaire et continue L qui apparaît dans la définition 1.1 est unique. On appelle L la différentielle de f au point a et on note $L = Df(a)$ ou encore $L = f'(a)$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion avec la dérivée usuelle.*

Proposition 1.3. *Une fonction différentiable en a est continue en a.*

Proposition 1.4. *Si $E = F = \mathbb{R}$, alors une fonction f est différentiable en un point a si et seulement si elle est dérivable. De plus, la différentielle $Df(a)$ est l'application linéaire et continue donnée par la multiplication par la dérivée $f'(a)$:*

$$Df(a)(h) = hf'(a).$$

Exemples.

a) Toute application linéaire et continue entre deux espaces normés est différentiable en tout point et sa différentielle en un point arbitraire est elle-même.
b) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 x_2$ est différentiable en tout point et sa différentielle est donnée par

$$Df(a)(h) = a_1 h_2 + a_2 h_1.$$

1.2 Dérivées directionnelles

Définition 1.5. *Soit U un ouvert de E, $a \in U$, $v \in E$ et $f : U \to F$. On dit que f admet au point a une dérivée directionnelle dans la direction v, et on la note par $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, si la limite suivante existe :*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(a+\varepsilon v) - f(a)}{\varepsilon}.$$

En d'autres termes, la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ est la dérivée à droite en 0 de la fonction $t \mapsto f(a+tv)$.

Proposition 1.6. *Si f est différentiable en a alors f admet des dérivées directionnelles en a suivant toute direction et nous avons de plus que*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v).$$

Exemples.

a) L'existence des dérivées directionnelles suivant toute direction n'entraîne pas forcément la différentiabilité de la fonction. Ni même la continuité. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq x^2 \\ 1 & \text{si } y \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées directionnelles en 0 qui sont nulles en toute direction. Mais f n'est pas continue en 0, et *a fortiori* n'est pas différentiable en 0.

b) Même si la fonction est continue et que toutes ses dérivées directionnelles existent en un point cela n'implique toujours pas que la fonction est différentiable. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-3y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue en 0 et toutes ses dérivées directionnelles en 0 existent :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = f(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Elle n'est cependant pas différentiable en 0 car les dérivées directionnelles en 0 ne sont pas linéaires en v.

1.3 Dimension finie

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie : $E = \mathbb{R}^n$.

1.3.1 Dérivées partielles

Définition 1.7. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to F$. On dit que f admet au point a une dérivée partielle par rapport à la variable x_j, et on la note par $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, si la limite suivante existe :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon e_j) - f(a)}{\varepsilon}$$

où on a noté par e_j le j-ème élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: toutes les composantes de e_j sont nulles sauf la j-ème qui est égale à 1. En d'autres termes, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est la dérivée en a_j de la fonction $t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ (on fige toutes les variables sauf x_j et on dérive par rapport à x_j).

La différentielle peut s'exprimer en fonction des dérivées partielles de la manière suivante.

Proposition 1.8. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to F$ une fonction différentiable en a. Alors*

$$Df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

1.3.2 Matrice jacobienne, gradient

Supposons maintenant que F est lui aussi de dimension finie : $F = \mathbb{R}^m$. Une fonction f à valeurs dans F admet m composantes

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Comme la limite dans $\mathbb{R}^m$ se fait composante par composante et que les dérivées partielles sont définies via une limite, nous avons que f admet des dérivées partielles ssi chaque composante de f admet des dérivées partielles et la dérivée partielle de f s'obtient en prenant les dérivées partielles des composantes.

La différentielle est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Elle s'identifie donc à une matrice. On peut exprimer cette matrice en fonction des dérivées partielles des composantes de f.

Proposition 1.9. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable en a. La matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est donnée par la matrice suivante*

$$M_f(a) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\Big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

On appelle cette matrice la matrice jacobienne en a.

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peut aussi être vue comme une fonction définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Nous avons alors deux notions de différentiabilité. D'une part la notion de différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Et d'autre part la notion de différentiabilité sur $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Ces deux notions sont-elles les mêmes ? La réponse est non. Plus précisément, la $\mathbb{C}$ différentiabilité implique la $\mathbb{R}$ différentiabilité mais la réciproque est fausse. Cela vient du fait qu'une application linéaire sur $\mathbb{C}$ est aussi linéaire sur $\mathbb{R}^2$ mais une application linéaire sur $\mathbb{R}^2$ ne l'est pas forcément sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.10. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en a. On appelle gradient de f en a le vecteur ligne*

$$\nabla f(a) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\big).$$

Le gradient coïncide avec la matrice jacobienne. On peut facilement voir que le gradient est la direction où f augmente le plus vite.

1.3.3 Continuité des dérivées partielles et différentiabilité

Le critère le plus important pour la différentiabilité d'une fonction est celui de la continuité des dérivées partielles.

Théorème 1.11. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$. On suppose que les dérivées partielles de f existent dans un voisinage de a et sont continues en a. Alors f est différentiable en a.*

Si la continuité des dérivées partielles est une condition suffisante de différentiabilité, ce n'est pas une condition nécessaire (seule l'existence des dérivées partielles est une condition nécessaire). En pratique, lorsqu'on veut décider de la différentiabilité d'une fonction concrète (qui a en général des points de singularité) on peut procéder de la manière suivante :

1. On étudie la continuité de la fonction. Si la fonction n'est pas continue elle n'est pas différentiable.
2. Si la fonction est continue, on étudie l'existence des dérivées partielles. Si au moins une des dérivées partielles n'existe pas, la fonction n'est pas différentiable.
3. Si la fonction est continue et toutes les dérivées partielles existent, on étudie la continuité des dérivées partielles. Si toutes les dérivées partielles sont continues alors la fonction est différentiable.
4. Si la fonction est continue et toutes les dérivées partielles existent mais certaines sont discontinues, il ne reste plus qu'à vérifier la définition de la différentiabilité. Mais l'application linéaire et continue L de la définition est connue (sa matrice est la matrice des dérivées partielles, la matrice jacobienne) donc la vérification de la définition est maintenant aisée.

Exemple. La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$, les dérivées partielles existent partout mais sont discontinues en $(0,0)$. La fonction est différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle.

1.4 Composition et inverse

Nous avons que la composition de deux applications différentiables est différentiable et la différentielle de la composition est la composition des différentielles.

Proposition 1.12. *Soient E, F et G trois espaces normé, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to F$ et $g : V \to G$. On suppose que f est différentiable en $a \in U$, que $f(a) \in V$ et que g est différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Corollaire 1.13. *Si $f = f(y)$ est une fonction différentiable à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g = g(x)$ est définie d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, alors*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f(g_1, g_2, \ldots, g_m)\big) = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_i}.$$

Définition 1.14. *Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et V un ouvert de F. Un homéomorphisme de U dans V est une application de U dans V qui est bijective, continue et d'inverse continue.*

La différentielle de l'inverse est l'inverse de la différentielle. Plus précisément :

Théorème 1.15. *Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F et $f : U \to V$ un homéomorphisme. On suppose que f est différentiable en un point $a \in U$ et que sa différentielle $Df(a)$ est un homéomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et*

$$D(f^{-1})(f(a)) = \big(Df(a)\big)^{-1}.$$

1.5 Inégalité des accroissements finis

Commençons par définir la dérivabilité.

Définition 1.16. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé et $f : I \to E$. On dit que f est dérivable en un point t_0 de I si la limite*

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe.

Pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans un espace normé, les notions de dérivabilité et différentiabilité coïncident.

Lemme 1.17. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé, $f : I \to E$ et $t_0 \in I$. La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si elle est différentiable en t_0. De plus, la différentielle en t_0 est l'application linéaire et continue de multiplication par la dérivée $f'(t_0)$ et nous avons que*

$$\|Df(t_0)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R},E)} = \|f'(t_0)\|_E.$$

Voici l'inégalité des accroissements finis dans un cas particulier.

Lemme 1.18. *Soit $f : [0,1] \to E$ dérivable. On suppose qu'il existe C tel que $\|f'(t)\|_E \leq C$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors $\|f(1) - f(0)\|_E \leq C$.*

Enfin le cas général :

Théorème 1.19. *Soit $f : U \to F$ où U est un ouvert de E et E, F sont des espaces normés. Soient $a, b \in U$ tels que le segment $[a,b] = \{ta + (1-t)b \ ; \ t \in [0,1]\}$ soit inclus dans U. On suppose que f est différentiable en tout point de $[a,b]$ et que la norme de sa différentielle en tout point du segment est bornée par une constante indépendante du point. Alors nous avons l'inégalité suivante*

$$\|f(a) - f(b)\|_F \leq \|a - b\|_E \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\|_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

Corollaire 1.20. *Soit $f : U \to F$ où U est un ouvert connexe de E et E, F sont des espaces normés. On suppose que f est différentiable sur U et que sa différentielle est nulle en tout point. Alors f est constante.*

1.6 Théorème d'inversion locale

Commençons par définir la notion de difféomorphisme.

Définition 1.21.
- *Une fonction f : U ouvert de E espace normé à valeurs dans F espace normé est dite de classe C^1 si elle est différentiable et si sa différentielle $Df : U \to \mathscr{L}(E,F)$ est continue.*
- *Une fonction f est un difféomorphisme de U dans V si U et V sont ouverts, si f est bijective de U dans V, f est C^1 et f^{-1} est C^1.*

Maintenant un lemme qui sera utilisé dans la preuve du théorème d'inversion locale.

Lemme 1.22. *Soient E et F deux espaces de Banach. L'ensemble $X = \{T \in \mathscr{L}(E,F) \ ; \ T \text{ inversible}\}$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E,F)$ et l'application $X \ni T \mapsto T^{-1} \in \mathscr{L}(E,F)$ est continue.*

Voici le théorème d'inversion locale.

Théorème 1.23 (inversion locale)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach, $f : U$ ouvert dans E à valeurs dans F une fonction de classe C^1 et $a \in U$ tels que $Df(a)$ est un homéomorphisme. Alors il existe U' un ouvert qui contient a et V' un ouvert qui contient $f(a)$ tels que f est un difémorphisme de U' dans V'.*

Nous avons aussi une version globale du théorème d'inversion locale.

Théorème 1.24 (inversion globale)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach, $f : U$ ouvert dans E à valeurs dans F une fonction de classe C^1. Si f est injective et $Df(x)$ est un homéomorphisme pour tout $x \in U$ alors $f(U)$ est un ouvert et f est un difféomorphisme de U dans $f(U)$.*

1.7 Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites permet de résoudre une équation du type $f(x, y) = 0$ en exprimant une des variables en fonction des autres. Par exemple $y = \varphi(x)$ où φ est une fonction implicite. On sait que φ existe mais on ne la connaît pas explicitement, d'où la terminologie de fonction implicite. On peut montrer ainsi que les zéros d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ se trouvent sur une courbe ; on discutera cela plus en détail quand on parlera de courbes plus tard.

Définissions d'abord la notion de différentielle partielle, qui est similaire à la notion de dérivée partielle.

Définition 1.25. *Soit $f : U$ ouvert de $E \times F$ à valeurs dans G où E, F et G sont des espaces normés. On dit que $f = f(x, y)$ admet une différentielle partielle par rapport à x au point $(a, b) \in U$ si l'application $x \mapsto f(x, b)$ est différentiable en a et on note*

$$D_x f(a, b) = D\big(x \mapsto f(x, b)\big)(a).$$

On définit de même la différentielle partielle par rapport à y et on note

$$D_y f(a, b) = D\big(y \mapsto f(a, y)\big)(b).$$

Comme dans le cas des dérivées partielles, on peut exprimer la différentielle en fonction des différentielles partielles.

Lemme 1.26. *Soit $f : U$ ouvert de $E \times F$ à valeurs dans G où E, F et G sont des espaces normés. Si f est différentiable en (a, b) alors elle admet des différentielles partielles en (a, b) et on a*

$$Df(a, b)(h, k) = D_x f(a, b)h + D_y f(a, b)k.$$

Voici le théorème des fonctions implicites.

Théorème 1.27 (fonctions implicites)**.** *Soient E, F des espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, $f : U \to F$ une fonction de classe C^1. Soit $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$ et $D_y f(a, b)$ est un homéomorphisme de $\mathscr{L}(F)$. Alors il existe un ouvert W qui contient (a, b), un ouvert V qui contient a et une fonction $\varphi : V \to F$ de classe C^1 tels qu'on a l'équivalence suivante :*

$$(x, y) \in W \text{ et } f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in V \text{ et } y = \varphi(x).$$

Exemples.

a) Considérons le système

$$\begin{cases} 4xy + 2xz + y + 4y^2 = 0 \\ x^3y + xz + 4z - z^2 = 0 \end{cases}$$

au voisinage du point $(0, 0, 0)$. Le théorème des fonctions implicites s'applique et nous permet d'exprimer y et z en fonction de x. Mais il ne s'applique pas pour exprimer x et y en fonction de z, ni x et z en fonction de y. Par ailleurs, il ne peut pas s'appliquer pour exprimer par exemple x en fonction de y et z car dans le théorèmes des fonctions implicites le nombre de variables qui s'expriment en fonction des autres est toujours égal au nombre d'équations.

b) Considérons l'équation $2xy - z + 2xz^3 = 5$ au voisinage du point $(1, 2, 1)$. On peut exprimer z en fonction de x et y et on peut calculer les dérivées de la fonction implicite en $(1, 2)$ à n'importe quel ordre.

2 Courbes paramétrées

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1. — *Une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ est une application continue $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

— *Le support de la courbe est $\gamma(I)$.*
— *Une courbe plane est une courbe de $\mathbb{R}^2$ ou une courbe de $\mathbb{R}^3$ qui est incluse dans un plan.*
— *Une courbe est dite de classe C^k si l'application γ est de classe C^k.*
— *Une courbe est dite simple si l'application γ est injective.*
— *Deux courbes paramétrées $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ sont dites équivalentes s'il existe un homéomorphisme $\varphi : I \to J$ tel que $\gamma \circ \varphi = \beta$. L'application φ est dite changement de paramètre, ou changement de paramétrage. Si β et γ sont de classe C^k, alors φ doit être un difféomorphisme de classe C^k. Si φ est croissante, le sens de parcours de la courbe est conservé ; dans le cas contraire il est inversé.*
— *La longueur d'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est la borne supérieure des longueurs de toutes les lignes polygonales dont les sommets sont sur la courbe :*

$$\mathrm{long}(\gamma) = \sup_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b} \sum_{j=1}^{n} \|\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Proposition 2.2. *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1. Nous avons que*

$$\mathrm{long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Remarque. Deux courbes équivalentes ont la même longueur.

Définition 2.3. — *Un point $\gamma(t_0)$ d'une courbe γ est dit régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Une courbe est dite régulière si tous ses points sont réguliers.*

— *Un point $\gamma(t_0)$ d'une courbe γ est dit bi-régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$ et $\gamma''(t_0) \neq 0$.*
— *Une courbe est dite paramétrée par la longueur d'arc, ou par l'abscisse curviligne, si $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout t.*

Remarque. Pour une courbe paramétrée par la longueur d'arc, le point $\gamma(t)$ parcourt la courbe à vitesse constante égale à 1.

Proposition 2.4. *Toute courbe régulière admet un paramétrage par la longueur d'arc.*

Proposition 2.5. *Dans un point régulier $\gamma(t_0)$, la direction de la tangente à la courbe est donnée par $\gamma'(t_0)$.*

Remarque. Dans un point qui n'est pas régulier, la direction de la tangente est donnée par la première dérivée non-nulle de γ en t_0.

2.2 Allure d'une courbe plane

Définition 2.6. *Soit γ une courbe C^2 paramétrée par la longueur d'arc. On appelle courbure la quantité*

$$\kappa(t) = \|\gamma''(t)\|$$

et centre de courbure le point

$$P(t) = \gamma(t) + \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|^2}$$

La courbure est une mesure quantitative du caractère « plus ou moins courbé ». La courbure d'une droite est nulle. Celle d'un cercle de rayon R est $\frac{1}{R}$. Intuitivement, un bout d'un cercle de rayon très grand semble être presque plat ; il est donc normal que sa courbure soit petite. Nous avons aussi la réciproque :

Proposition 2.7. *a) Toute courbe régulière de classe C^2 de courbure nulle est un bout de droite.*

b) Toute courbe régulière de classe C^3 de courbure constante et strictement positive est un bout de cercle.

Définition 2.8. *Le cercle osculateur est le cercle dont le centre est le centre de courbure et le rayon est l'inverse de la courbure : $C(P(t), \frac{1}{\kappa(t)})$.*

Le cercle osculateur en $\gamma(t_0)$ passe par $\gamma(t_0)$. Son centre est situé sur la normale à la courbe, du même côté que $\gamma''(t_0)$ (qui est aussi normale à la courbe dans le cas d'une paramétrisation par la longueur d'arc). La distance de son centre à $\gamma(t_0)$ est l'inverse de la courbure. Le cercle osculateur en $\gamma(t_0)$ est le cercle qui approche le plus la courbe au point $\gamma(t_0)$. Plus précisément, nous avons la propriété suivante :

Proposition 2.9. *Soit γ une courbe C^2 et t_0 un point bi-régulier. Si $t_1 < t_2 < t_3$ tendent vers t_0 alors le cercle qui passe par $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ et $\gamma(t_3)$ tend vers le cercle osculateur en $\gamma(t_0)$ (au sens que le centre et le rayon convergent).*

2.3 Remarques sur les courbes gauches

Une courbe gauche est une courbe de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas plane. On peut définir de même le cercle osculateur et la proposition 2.9 reste vraie. Le cercle osculateur est situé dans le plan osculateur qui est engendré par γ' et γ''. Une quantité spécifique à la dimension trois est la torsion qui est définie par

$$\theta = -\frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}$$

La torsion d'une courbe mesure la manière dont la courbe se tord pour sortir de son plan osculateur. On peut montrer que la torsion est nulle si et seulement si la courbe est plane.

2.4 Courbes planes définies par une équation

Soit f une fonction C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $\Gamma = \{(x, y) \,;\, f(x, y) = 0\}$. Soit $(a, b) \in \Gamma$ un point où le gradient de f ne s'annule pas. Alors une des dérivées partielles de f en (a, b) ne s'annule pas. Disons que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites dit qu'il existe φ de classe C^1 définie au voisinage de a telle que, au voisinage de (a, b)

$$f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \varphi(x).$$

Ainsi, au voisinage de (a, b), l'ensemble Γ est une courbe de classe C^1 paramétrée par $x \mapsto (x, \varphi(x))$. La tangente à la courbe est $(1, \varphi'(x))$. On peut vérifier que ce vecteur est normal au $\nabla f(a, b)$. L'équation de la tangente au point (a, b) est donc

$$(x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

3 Séries entières

3.1 Définition, rayon de convergence

Définition 3.1. *Une série entière est une série formelle de la forme* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *où* $a_n \in \mathbb{C}$ *et* $z \in \mathbb{C}$.

Rappelons maintenant quelques propriétés de la limsup.

Proposition 3.2. *Soit* (x_n) *une suite réelle et* $l = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$. *Alors*

a) l *est la plus grande limite de sous-suite de* (x_n).

b) Si $l' > l$ *alors il existe* N *tel que* $x_n < l'$ *pour tout* $n \geq N$.

c) Si $x_n \geq 0$ *et* $\limsup_{n\to\infty} x_n = 0$ *alors* $x_n \to 0$.

Définition 3.3. *On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *le nombre*

$$R = \sup\{r \geq 0 \ ; \ |a_n| r^n \ \textit{borné}\}.$$

Le théorème suivant regroupe quelques propriétés du rayon de convergence.

Théorème 3.4. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.

a) La série converge pour tout $|z| < R$ *et diverge pour tout* $|z| > R$.

b) La série converge uniformément sur tous les compacts du disque de convergence $D(0, R)$ *et la même chose est vraie pour toutes ses dérivées partielles de tout ordre.*

c) Nous avons la formule d'Hadamard pour le rayon de convergence

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

d) Si tous les a_n *sont non-nuls et* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to l$ *alors* $R = \frac{1}{l}$ *(critère de d'Alembert).*

Le rayon de convergence d'une série entière peut être 0 ou ∞. Si le rayon de convergence est nul la série ne converge qu'en 0, si c'est ∞ la série converge en tout point. Lorsqu'on applique la formule d'Hadamard on convient que $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$.

Définition 3.5. *Le disque de convergence d'une série entière est le disque ouvert* $D(0, R)$ *où* R *est le rayon de convergence.*

Même si la série converge sur le disque fermé, comme c'est le cas par exemple pour la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$, on appelle quand même disque de convergence le disque ouvert. La raison est que les autres propriétés, comme la convergence de la série des dérivées, ne sont vraies que dans le disque ouvert même si la série converge sur le disque fermé.

3.2 Somme et produit

Définition 3.6. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières. La série somme est la série* $\sum c_n z^n$ *où* $c_n = a_n + b_n$.

Proposition 3.7. *Soient* $\sum a_n z^n$, *respectivement* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence* R_1, *respectivement* R_2. *Alors la série somme est de rayon de convergence* $R \geq \min(R_1, R_2)$. *De plus, si* $R_1 \neq R_2$ *alors* $R = \min(R_1, R_2)$.

Lorsque $R_1 = R_2$ on n'a plus forcément $R = \min(R_1, R_2)$. Contre-exemple en posant $a_n = -b_n$.

Définition 3.8. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La série produit est la série $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.*

Proposition 3.9. *Soient $\sum a_n z^n$, respectivement $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1, respectivement R_2. Alors la série produit est de rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$. De plus, si $|z| < \min(R_1, R_2)$, alors la somme de la série produit est le produit de sommes de deux séries (la somme du produit est le produit des sommes).*

Lorsque $R_1 \neq R_2$ on n'a pas forcément $R = \min(R_1, R_2)$. Contre-exemple en posant $\sum a_n z^n = 1 - z$ et $\sum b_n z^n = \sum z^n$.

4 Fonctions holomorphes

4.1 Définitions, généralités

Définition 4.1. *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

- *La fonction f est dite $\mathbb{C}$–dérivable, ou plus simplement dérivable, en $z_0 \in \Omega$ si la limite $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe. La valeur de cette limite est la dérivée de f en z_0 :*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- *La fonction f est dite holomorphe sur Ω si elle est dérivable en tout point de Ω.*

On peut voir très facilement que les puissance z^n, et plus généralement les polynômes, sont des fonctions dérivables.

On vérifie sans peine que les propriétés suivantes bien connues pour la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ restent vraie pour la dérivabilité sur $\mathbb{C}$.

Proposition 4.2. *a) Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

b) Si f et g sont dérivables en z_0, alors $f + g$ est dérivable en z_0 et $(f + g)' = f' + g'$.

c) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et f est dérivable en z_0, alors λf est dérivable en z_0 et $(\lambda f)' = \lambda f'$.

d) Si f et g sont dérivables en z_0, alors fg est dérivable en z_0 et $(fg)' = f'g + fg'$.

e) Si f et g sont dérivables en z_0 et $g(z_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en z_0 et $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

f) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et f est dérivable en z_0, alors f^n est dérivable en z_0 et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

g) Si g est dérivable en z_0 et f est dérivable en $g(z_0)$ alors $f \circ g$ est dérivable en z_0 et $(f \circ g)' = f' \circ g\ g'$.

Le lien entre la $\mathbb{C}$–dérivabilité et la $\mathbb{R}^2$–différentiabilité se fait par les équations de Cauchy–Riemann.

Théorème 4.3. *Soit $f = P + iQ$ une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$.*

a) La fonction f est $\mathbb{C}$–dérivable en z_0 si et seulement si f est différentiable en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0).$$

b) Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

c) Si f est $\mathbb{C}$–dérivable en z_0 alors

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Exemple. La fonction $f(z) = |z|^2$ est dérivable seulement en 0. La fonction $f(x, y) = x^2 + iy^2$ est dérivable seulement sur la droite $\{(x, x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Aucune de ces deux fonctions n'est holomorphe.

Corollaire 4.4. *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur Ω de dérivée nulle. Alors f est constante.*

Corollaire 4.5. *La somme d'une série entière est holomorphe sur le disque de convergence et le rayon de convergence de la série des dérivées est égal au rayon de convergence de la série de départ.*

Définition 4.6. *Une primitive d'une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur Ω telle que $g' = f$.*

4.2 Exponentielle, fonctions trigonométriques, logarithme

Définition 4.7. *Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit l'exponentielle complexe par*

$$e^z = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On peut vérifier aisément à l'aide du critère de d'Alembert que la série qui définit l'exponentielle a un rayon de convergence infini. L'exponentielle est donc bien-définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Remarquons aussi que lorsque $z \in \mathbb{R}$ on retrouve l'exponentielle réelle. Voici maintenant quelques propriétés de l'exponentielle complexe.

Proposition 4.8. *Nous avons les propriétés suivantes :*

a) L'exponentielle complexe est holomorphe et sa dérivée est elle-même : $(e^z)' = e^z$.

b) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

c) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

d) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ et $\arg(e^z) = \operatorname{Im} z$ (mod 2π). En particulier, l'exponentielle complexe ne s'annule jamais.

e) L'exponentielle complexe est périodique de période $2i\pi$: $e^{z+2i\pi} = e^z$.

On peut aussi définir les principales fonctions trigonométriques comme sommes de séries entières :

$$\cos z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cosh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on peut écrire ces fonctions trigonométriques à l'aide de l'exponentielle. Nous avons

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos \qquad \cosh' = \sinh \qquad \sinh' = \cosh \qquad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} \qquad \tan' = \frac{1}{\cos^2}$$

Toutes les formules trigonométriques connues dans $\mathbb{R}$ s'étendent à $\mathbb{C}$ sans difficulté en utilisant les expressions des fonctions trigonométriques en terme d'exponentielle et les propriétés de l'exponentielle.

On peut définir le logarithme comme l'inverse de l'exponentielle.

Définition 4.9. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle* $\log(z)$ *un nombre complexe u tel que $e^u = z$.*

Remarques.

a) $\log(0)$ n'a pas de sens. En effet, l'exponentielle ne s'annule jamais.

b) $\log(z)$ n'est pas uniquement défini. En effet, l'exponentielle est périodique de période $2\pi i$ donc si $e^u = z$ alors $e^{u+2\pi i} = z$ aussi.

En identifiant le module et l'argument de e^u et de z on trouve la formule suivante pour $\log(z)$:

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z). \tag{4.1}$$

Comme l'argument est défini à 2π près, le logarithme est défini à $2\pi i$ près.

Nous aimerions maintenant définir le logarithme en tant que fonction holomorphe. Cela s'avère plutôt compliqué. On montrera plus tard qu'il n'est pas possible de faire cela sur $\mathbb{C}^*$ tout entier.

Définition 4.10. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Une détermination holomorphe du logarithme sur Ω est une fonction f holomorphe sur Ω telle que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \Omega$.*

Pour trouver une détermination holomorphe du logarithme sur un ouvert Ω il suffit de pouvoir définir de manière continue l'argument sur Ω. En effet, cela implique que le logarithme défini par (4.1) est régulier (différentiable) et si c'est différentiable c'est automatiquement holomorphe en vertu de la proposition suivante :

Proposition 4.11. *Soient f holomorphe et g différentiable tels que $f \circ g = Id$. Alors g est holomorphe.*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on introduit le plan fendu $P_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \ ; \ r \geq 0\}$. L'argument peut être défini de manière continue sur P_α en choisissant par exemple $\arg(z) \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Donc il existe une détermination holomorphe du logarithme sur le plan fendu P_α. On appelle détermination principale du logarithme celle qui correspond au cas $\alpha = -\pi$.

Définition 4.12. *On appelle détermination principale du logarithme l'application*

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ni z \mapsto \log(z) = \ln|z| + i\arg(z) \quad \textit{où} \quad \arg(z) \in]-\pi, \pi[.$$

Dans la suite, quand on parlera du logarithme complexe il faut comprendre la détermination principale du logarithme sauf mention contraire. Remarquons que nous n'avons pas forcément l'égalité $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$. Cette relation n'a lieu que modulo $2\pi i$.

Lorsqu'une détermination holomorphe du logarithme existe, on peut définir de manière holomorphe pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ la puissance complexe par $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$. On n'a pas forcément l'égalité $(z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha$.

On peut aussi s'intéresser à la détermination holomorphe du logarithme d'une fonction.

Définition 4.13. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe. Une détermination holomorphe du logarithme de f sur Ω est une fonction g holomorphe sur Ω telle que $e^{g(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$.*

Proposition 4.14. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe.*

a) Si g est une détermination holomorphe de $\log(f)$ sur Ω, alors $g' = \frac{f'}{f}$.

b) Si $\frac{f'}{f}$ admet une primitive sur Ω, alors il existe une détermination holomorphe de $\log(f)$ sur Ω.

En particulier, la dérivée d'une détermination holomorphe de $\log(z)$ est toujours $\frac{1}{z}$.

Corollaire 4.15. *Il existe une détermination holomorphe de $\log(f)$ sur Ω si et seulement si $\frac{f'}{f}$ admet une primitive sur Ω.*

Un dernier résultat sur le logarithme :

Proposition 4.16. *Pour tout $|z| < 1$ nous avons que*

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

4.3 Intégration complexe

Commençons par plusieurs définitions.

Définition 4.17. *a) Un chemin est une courbe C^1 par morceaux.*

b) L'origine d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est $\gamma(a)$. L'extrémité est $\gamma(b)$.

c) Un lacet est une courbe fermée : $\gamma(a) = \gamma(b)$.

d) Un chemin simple est un chemin sans intersections (la paramétrisation est injective).

e) Un changement de paramètre est toujours un C^1 difféomorphosme <u>croissant</u> (le sens de parcours de la courbe est préservé).

f) Si γ_1 et γ_2 sont deux courbes telles que l'extrémité de γ_1 est l'origine de γ_2 on définit l'union $\gamma_1 \vee \gamma_2$ comme étant la courbe paramétrée par

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & si\ t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) & si\ t \in [1,2] \end{cases}$$

(par un changement de paramétrage on peut supposer γ_1 définie sur $[0,1]$ et γ_2 définie sur $[1,2]$.)

g) Si f est une fonction continue sur un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, on définit

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

où le produit $f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ se fait en tant que nombres complexes.

Voici quelques propriétés élémentaires de l'intégrale complexe.

Proposition 4.18. *a) L'intégrale complexe est linéaire.*

b) L'intégrale complexe est invariante par changement de paramètrage.

c) Si on change le sens de parcours d'une courbe, l'intégrale change de signe.

d) Nous avons l'inégalité

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leq \operatorname{long}(\gamma)\sup_{z\in\gamma}|f(z)|.$$

e) Si f est holomorphe alors

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

f) Si f admet des primitives et γ est un lacet alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

g) Si l'extrémité de γ_1 est l'origine de γ_2 alors

$$\int_{\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

h) Si $f_n \to f$ uniformément sur γ alors

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Comme l'intégrale complexe ne dépend pas du paramétrage de la courbe, pour travailler avec une intégrale complexe il suffit de disposer de l'image de la courbe et de son sens de parcours. On pourra choisir le paramétrage comme on veut dés lors que le sens de parcours est préservé. En pratique, on ne donnera pas le paramétrage d'une courbe ; on donnera seulement son image et son sens de parcours. Dans le cas d'un lacet, parfois il n'est même pas nécessaire de spécifier le sens de parcours. On choisira par défaut le sens direct (ou sens trigonométrique), c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une horloge. L'autre sens est appelé sens rétrograde.

4.4 Indice d'un point par rapport à un lacet

Définition 4.19. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \gamma$. On définit l'indice du point z_0 par rapport à la courbe γ :*

$$\operatorname{Ind}(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz.$$

Voici quelques propriétés de l'indice.

Proposition 4.20. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \gamma$.*

a) L'indice est toujours entier : $\operatorname{Ind}(z_0,\gamma) \in \mathbb{Z}$.

b) L'indice est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

c) L'indice est nul sur la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

Nous avons l'interprétation géométrique suivante de l'indice. L'indice est le nombre de tours que l'on fait autour de z_0 lorsqu'on parcourt complètement la courbe (les tours dans le sens direct comptent pour $+1$, ceux dans le sens rétrograde comptent pour -1). Dans le cas d'une courbe d'allure compliquée, il est utile de procéder de la manière suivante. On trace une demi-droite arbitraire d'origine z_0. Pour chaque intersection de la demi-droite avec la courbe on compte $+1$ si la courbe croise la demi-droite dans le sens direct et -1 sinon. On fait la somme et le résultat est l'indice de z_0. Remarquons enfin que dans le cas d'un lacet simple, l'indice à l'intérieur de la courbe est ± 1, suivant que la courbe est parcourue dans le sens direct ou pas.

4.5 Théorème et formules de Cauchy. Applications

Définition 4.21. *Un ouvert Ω est dit étoilé s'il existe $a \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ nous avons que tout le segment fermé $[a, z]$ est inclus dans Ω.*

Le but de cette partie est de montrer le théorème de Cauchy suivant.

Théorème 4.22 (Cauchy). *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

En fait, on peut se passer de l'hypothèse que Ω est étoilé. Il suffit de supposer que f est holomorphe à l'intérieur du lacet γ.

Pour montrer ce théorème, on considére d'abord le cas d'un triangle.

Théorème 4.23 (Goursat). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\triangle$ un triangle inclus avec son intérieur dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point où elle est continue. Alors*

$$\int_\triangle f(z)\, dz = 0.$$

Voici maintenant une version légèrement améliorée du théorème de Cauchy.

Théorème 4.24 (Cauchy bis). *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point où elle est continue. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

De plus, f admet un primitive sur Ω.

Nous obtenons comme corollaire la formule de Cauchy :

Théorème 4.25 (formule de Cauchy). *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Pour tout $z \in \Omega \setminus \gamma$ nous avons que*

$$f(z) \operatorname{Ind}(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z}\, du.$$

L'intégrale qui apparaît dans le terme de droite au-dessus peut se dériver par rapport à z. En dérivant plusieurs fois nous obtenons des formules similaires pour les dérivées de f.

Théorème 4.26 (formules de Cauchy). *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors f peut être dérivée autant de fois qu'on veut et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \Omega \setminus \gamma$ nous avons que*

$$f^{(n)}(z) \operatorname{Ind}(z, \gamma) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u - z)^{n+1}}\, du.$$

Remarques.

a) Soulignons que ce théorème montre en particulier que la dérivée d'une fonction holomorphe est elle-même holomorphe.

b) Comme dans les théorèmes de Goursat et de Cauchy bis, nous pouvons supposer que la fonction f est holomorphe sauf éventuellement en un point où elle est continue. Nous obtenons alors que f est holomorphe aussi dans ce point exceptionnel.

La formule de Cauchy dans le cas d'un cercle donne la formule de la moyenne suivante :

Proposition 4.27 (formule de la moyenne)**.** *Soit f holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$. Alors*

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi it})\, dt.$$

En prenant la valeur absolue dans les formules de Cauchy dans le cas où γ est un cercle, nous obtenons les inégalités de Cauchy.

Proposition 4.28 (inégalités de Cauchy)**.** *Soit f holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$. Alors*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{C(z_0,r)} |f|.$$

Une application immédiate des inégalités de Cauchy est le théorème de Liouville.

Théorème 4.29 (Liouville)**.** *Une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ est nécessairement constante.*

Le théorème de Liouville implique à son tour le théorème de d'Alembert.

Théorème 4.30 (d'Alembert)**.** *Tout polynôme admet une racine complexe.*

Le théorème de Goursat admet une réciproque. C'est le théorème de Morera.

Théorème 4.31 (Morera)**.** *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω. Si pour tout triangle $\triangle$ contenu dans Ω avec son intérieur nous avons que $\int_{\triangle} f(z)\, dz = 0$, alors f est holomorphe.*

Voici maintenant une réciproque de la propriété qui affirme que l'intégrale sur une lacet d'une dérivée est nulle.

Théorème 4.32. *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω. La fonction f admet une primitive dans Ω si et seulement si $\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$ pour tout lacet γ de Ω.*

Ce théorème nous permet ensuite de caractériser les ouverts où une détermination holomorphe du logarithme existe de la manière suivante :

Corollaire 4.33. *Soit Ω un ouvert connexe qui ne contient pas 0. Il existe une détermination holomorphe du logarithme sur Ω si et seulement si* $\mathrm{Ind}(0, \gamma) = 0$ *pour tout lacet γ de Ω.*

4.6 Analyticité des fonctions holomorphes

Les fonctions analytiques sont les sommes des séries entières.

Définition 4.34. *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω. On dit que f est analytique en un point $z_0 \in \Omega$ s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence > 0 telle qu'on ait*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

au voisinage de z_0.

Nous avons vu que les fonctions analytiques sont holomorphes. Nous pouvons déterminer les coefficients a_n en fonctions des dérivées de f.

Proposition 4.35. *Soit f une fonction analytique en z_0 : $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$. Nous avons*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Il se trouve que toute fonction holomorphe est analytique. Ainsi, pour les fonctions d'une variable complexe, les notions d'holomorphie et d'analyticité coïncident.

Théorème 4.36. *Une fonction holomorphe est analytique en tout point.*

Remarque. On a un énoncé plus précis : si la fonction est holomorphe dans le disque $D(z_0, r)$, alors le rayon de convergence de sa série entière par rapport à z_0 est au moins égal à r.

4.7 Principe des zéros isolés

Commençons par montrer le résultat préliminaire suivant.

Proposition 4.37. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et $a \in \Omega$. Si f et toutes ses dérivées s'annulent en a (i.e. $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$), alors f est identiquement nulle.*

Définissons maintenant l'ordre d'un zéro de f.

Définition 4.38. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et $a \in \Omega$ un zéro de f. L'ordre de a en tant que zéro de f, ou sa multiplicité, est l'ordre de la première dérivée non nulle de f en a. Si toutes les dérivées s'annulent en a, l'ordre est dit infini.*

L'ordre de a en tant que zéro de f est donc l'entier m caractérisé par la propriété suivante :

$$f(a) = f'(a) = \dots f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Par la proposition 4.37, les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sont tous d'ordre fini. Nous pouvons montrer aisément le résultat de factorisation suivant.

Proposition 4.39. *Soit Ω un ouvert connexe, f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω et a un zéro d'ordre m. Il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = (z - a)^m g(z)$.*

Voici maintenant le principe des zéros isolés.

Théorème 4.40. *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω. Alors les zéros de f sont isolés.*

Ainsi, une suite injective de zéros de d'une fonction holomorphe non identiquement nulle peut s'accumuler ou bien à l'infini ou bien sur le bord de Ω mais jamais à l'intérieur. Exemples : les zéros de la fonction $e^z - 1$ tendent vers l'infini, ceux de $e^{\frac{1}{z}} - 1$ tendent vers 0 qui n'est pas dans le domaine de définition de la fonction.

Le principe des zéros isolés porte parfois le nom de principe de prolongement analytique car il permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 4.41. *Soit Ω un ouvert connexe et f, g deux fonctions holomorphes. On suppose qu'il existe une suite injective z_n qui converge vers un point de Ω et telle que $f(z_n) = g(z_n)$ pour tout n. Alors $f \equiv g$.*

4.8 Principe du maximum

En général, la valeur absolue d'une fonction holomorphe ne peut pas avoir de maximum local à l'intérieur du domaine de définition.

Théorème 4.42 (principe du maximum)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Si $|f|$ admet un maximum local en un point de Ω, alors f est constante.*

Soit f une fonction holomorphe qui n'est pas constante et z_n une suite telle que $|f(z_n)| \to \sup_{\Omega} |f(z)|$. Si z_n est non bornée, alors il existe une sous-suite z_{n_k} qui tend vers l'infini. Le sup de $|f|$ s'obtient dans ce cas à l'infini. Si z_n est bornée, alors il existe une sous-suite z_{n_k} qui converge vers un élément a. Comme f n'est pas constante, $a \notin \Omega$. Donc $a \in \overline{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$. Dans ce cas, le sup de $|f|$ s'obtient sur le bord. On peut ainsi dire de manière un peu formelle (car on ne sait si f a une trace au bord ou une limite à l'infini) que $|f|$ admet son sup à l'infini ou sur le bord de l'ouvert de définition. Voici maintenant un énoncé rigoureux.

Proposition 4.43. *Soit Ω un ouvert borné, f une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

4.9 Séries de Laurent

Les séries de Laurent jouent le rôle de série entière pour les fonctions qui sont définies sur des couronnes circulaires. Définissons d'abord ce que c'est une série de Laurent.

Définition 4.44. *Une série de Laurent est une série de la forme*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

Une série de Laurent est dite convergente si les deux séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$$

convergent. La somme de la série de Laurent est la somme de ces deux séries.

Les fonctions définies sur des couronnes circulaires admettent des développements en série de Laurent. Plus précisément, nous avons les propriétés suivantes.

Théorème 4.45. *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne circulaire $C(a, r_1, r_2) = \{z \; ; \; r_1 < |z-a| < r_2\}$ où $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Il existe une série de Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ qui converge sur la couronne $C(a, r_1, r_2)$ et dont la somme vaut $f(z)$:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n.$$

De plus, les coefficients a_n sont uniquement déterminés par la formule

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

où $r \in]r_1, r_2[$ est arbitraire. En particulier, l'intégrale au-dessus ne dépend pas de r. Enfin, la série de Laurent converge uniformément sur tout compact de la couronne $C(a, r_1, r_2)$.

Sur une couronne donnée, le développement en série de Laurent est uniquement déterminé. Par contre, sur des couronnes différentes on peut avoir des développements en série de Laurent différents pour la même fonction. Exemple avec $\frac{1}{z^2-z}$ sur les couronnes $C(0, 0, 1)$ et $C(0, 1, \infty)$.

La preuve du théorème 4.45 montre en fait un peu plus : la partie régulière du développement en série de Laurent $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ converge uniformément sur les compacts du disque $\{|z| < r_2\}$ (c'est par conséquent holomorphe sur ce disque) et la partie singulière $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$ converge uniformément sur les compacts de l'ensemble $\{|z| > r_1\}$ (c'est par conséquent holomorphe sur cet ensemble).

4.10 Singularités isolées

Définition 4.46. *On dit que le point a est une singularité isolée de la fonction f s'il existe $r > 0$ tel que f soit holomorphe dans le disque pointé $\dot{D}(a, r) = D(a, r) \setminus \{a\} = \{z \; ; \; 0 < |z-a| < r\}$.*

Les singularités isolées peuvent être de trois types :

a) a est dite singularité artificielle (ou fausse singularité) si f est bornée au voisinage de a ;

b) a est un pôle si $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = +\infty$;

c) a est une singularité essentielle si $|f|$ est non-bornée au voisinage de a mais ne tend pas vers l'infini en a.

Remarquons que le développement en série de Laurent dans un disque pointé ne dépend pas du rayon du disque.

Nous pouvons caractériser le type de point singulier à l'aide du développement en série de Laurent au voisinage du point.

Théorème 4.47. *Soit a une singularité isolée de la fonction f et $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ le développement en série de Laurent de f dans le disque pointé $\dot{D}(a, r)$. Alors*

a) a est une fausse singularité $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$ pour tout $n < 0$ $\Leftrightarrow$ f se prolonge en une fonction holomorphe en a.

b) a est un pôle si et seulement si il existe $m \geq 1$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n \leq -m-1$ et $a_{-m} \neq 0$ (c'est-à-dire que le développement en série de Laurent commence à $-m$). On dit alors que a est un pôle d'ordre m (pôle simple si $m = 1$, double si $m = 2$, triple si $m = 3$, etc.). De plus, on peut écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ où g est holomorphe en a et $g(a) \neq 0$.

c) a est une singularité essentielle si le développement en série de Laurent va effectivement jusqu'à $-\infty$: il existe une suite $n_k \to -\infty$ telle que $a_{n_k} \neq 0$. On a de plus que f peut atteindre n'importe quelle limite lorsque $z \to a$: pour tout $u \in \mathbb{C}$ il existe une suite $z_n \to a$ telle que $f(z_n) \to u$.

Un exemple de singularité essentielle est donnée par 0 pour la fonction $e^{\frac{1}{z}}$.

4.11 Théorème des résidus

Définition 4.48. *Soit a une singularité isolée de la fonction f. Le résidu de f en a, $\mathrm{Res}(f, a)$, est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f dans un disque pointé $\dot{D}(a, r)$.*

Attention, il ne faut pas se tromper de développement de Laurent. En effet, la série de Laurent dépend de la couronne considérée. Par exemple $\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2-z}, 0) = -1$ mais le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de Laurent valable pour $|z| > 1$ est 0.

Il est très important de bien savoir calculer un résidu. Voici quelques méthodes de calcul.

— Dans le cas d'un pôle simple nous avons que

$$\mathrm{Res}(f, a) = \big[(z-a)f(z)\big]\Big|_{z=a} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Si $f = \frac{g}{h}$ avec $g(a) \neq 0$ alors

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

— Dans le cas d'un pôle multiple, d'ordre m, nous avons de même

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!}\big[(z-a)^m f(z)\big]^{(m-1)}(a).$$

Cette dérivée étant parfois difficile à calculer, il est souvent plus facile de procéder par identification des coefficients de la manière suivante. On écrit $f = \frac{g}{h}$ avec g, h holomorphes en a. L'ordre de a comme pôle de f est la différence entre l'ordre de a comme zéro de h et l'ordre de a comme zéro de g. Puis on écrit

$$f = \frac{g}{h} = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \ldots$$

d'où

$$g = h\Big(\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \ldots\Big).$$

Maintenant on remplace g et h par leurs développements en série entière (seuls les m premiers termes sont nécessaires), on développe le produit à droite et on identifie les coefficients. Cela donne un système d'équations très facile à résoudre, ce qui nous permet de trouver a_{-1} qui est le résidu cherché. Pour simplifier encore plus les calculs, on fera le changement de notation $u = z - a$ et on développera en puissances de u.

Exemples.

a) Nous avons que $\mathrm{Res}(\frac{e^z}{z^2+1}, i) = \frac{e^i}{2i}$ (pôle simple).

b) Tous les résidus de $\frac{z^3}{z^4+1}$ sont égaux à $\frac{1}{4}$ (pôles simples).

c) De même, tous les résidus de $\operatorname{cotan} z$ sont 1 (pôles simples).

d) Les pôles de $\frac{e^{iz}}{1+\cos z}$ sont tous doubles et les résidus sont tous $-2i$.

e) Le résidu de $\frac{2z+3}{(z-1)^3 e^z}$ en 1 est $\frac{1}{2e}$ (pôle triple).

Voici maintenant le théorème des résidus, le théorème le plus important de cette partie sur les fonctions holomorphes.

Théorème 4.49 (théorème des résidus)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, f une fonction holomorphe sur Ω sauf en un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et γ un lacet tracé sur Ω qui ne passe pas par les singularités de f. Nous avons que*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, a_j) \operatorname{Ind}(a_j, \gamma)$$

Remarques.

a) Dans la somme au-dessus, seules les singularités de f situées à l'intérieur de la courbe γ apparaissent (les autres disparaissent car l'indice est nul). En fait, nous n'avons pas vraiment besoin que f admette un nombre fini de singularités dans Ω. Il faut seulement avoir un nombre fini de singularités à l'intérieur de la courbe γ. Par compacité, cela est toujours vrai si la fonction f n'admet que des singularités isolées.

b) Dans le cas d'une courbe simple orientée dans le sens direct, le théorème des résidus s'écrit sous la forme

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{a_j \in \operatorname{int}(\gamma)} \operatorname{Res}(f, a_j).$$

4.12 Applications du théorème des résidus

Le théorème des résidus est le résultat le plus important du cours de fonctions holomorphes. Voici quelques applications de ce théorème.

4.12.1 Exemples de calculs d'intégrales

Le théorème des résidus fournit une méthode de calculs pour des diverses intégrales (classiques). Voici plusieurs exemples.

1. Les intégrales de la forme

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

où $R(x, y)$ est une fraction rationnelle en x et y qui ne s'annule pas sur le cercle unité.

Pour calculer I on cherche une fonction f holomorphe avec des singularités isolées telle que

$$I = \int_{|z|=1} f(z)\, dz.$$

En notant $z = e^{it}$ on a que $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ et $\sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$. On trouve facilement

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\Big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\Big).$$

On remarque que f est une fraction rationnelle. On conclut donc par le théorème des résidus que

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_j \text{ pôle de } f \\ |z_j| < 1}} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Nous trouvons par exemple la formule suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 - 2a\cos t + 1}\, dt = \frac{2\pi}{|a^2-1|}$$

pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

2. Les intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx$$

où R est une fraction rationnelle sans singularités réelles et telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$.

Dans ce cas on applique le théorème des résidus à la fonction $R(z)$ sur le lacet donné par l'union de $\gamma_1 = [-A, A]$ et $\gamma_2 = \{Ae^{it}\ , 0 \leq t \leq \pi\}$. On fait ensuite $A \to \infty$ et on trouve la formule suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_j \text{ pôle de } R \\ \mathrm{Im}(z_j)>0}} \mathrm{Res}(R, z_j).$$

Exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Les intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}\, dx$$

où R est une fraction rationnelle sans singularités réelles et telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$.

Comme au-dessus on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_j \text{ pôle de } Re^{iz} \\ \mathrm{Im}(z_j)>0}} \mathrm{Res}(R(z)e^{iz}, z_j). \tag{4.2}$$

Si on sait calculer l'intégrale de $R(x)e^{ix}$, on sait aussi calculer l'intégrale de $R(x)\cos x$ (et celle de $R(x)\sin x$) : ou bien on prend la partie réelle si $R(x)$ est réelle ou bien en écrivant $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Attention, on ne peut pas appliquer directement la méthode de l'exemple 2. directement à la fonction $R(z)\cos z$ car celle-ci ne décroît pas sur γ_2 quand $A \to \infty$.

4. Même intégrale que dans l'exemple précédent mais cette fois-ci on suppose seulement que $\lim\limits_{|z|\to\infty} R(z) = 0$. Dans ce cas nous avons que $R(z) = \frac{a}{z} + O(\frac{1}{|z|^2})$ quand $|z| \to \infty$. Comme l'intégrale généralisée $\int\limits_{|x|>1} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$ converge (critère d'Abel) et qu'une fonction en $O(\frac{1}{|x|^2})$ est intégrable à l'infini, nous avons que l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}\, dx$ est une intégrale généralisée convergente. L'approche utilisée dans l'exemple 2. s'applique encore en utilisant le lemme de Jordan suivant.

Lemme 4.50 (Jordan)**.** *Soit f une fonction continue sur $\{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ telle que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Alors*

$$\lim_{A\to\infty} \int_{\gamma_A} f(z)\, dz = 0$$

où γ_A est l'arc de cercle $\gamma_A = \{Ae^{it} \ , 0 \leq t \leq \pi\}$.

La formule (4.2) reste valable dans ce cas.

Exemple :

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \pi(\frac{2}{3e^2} - \frac{1}{6e}).$$

2. Les intégrales de la forme

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\, dx$$

où R est une fraction rationnelle sans singularités réelles et telle que $\lim_{|z|\to\infty} R(z) = 0$.

Dans ce cas nous appliquons le théorème des résidus à la fonction $\frac{R(z)}{z^\alpha}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ (avec des singularités isolées) où on définit $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ et le logarithme est défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ en prenant l'argument dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Le lacet utilisé est l'union des courbes suivantes :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{Ae^{it} \ ; \ \eta \leq t \leq 2\pi - \eta\}, \\
\gamma_2 &= \{te^{-i\eta} \ ; \ \varepsilon \leq t \leq A\}, \\
\gamma_3 &= \{\varepsilon e^{it} \ ; \ \eta \leq t \leq 2\pi - \eta\}, \\
\gamma_4 &= \{te^{i\eta} \ ; \ \varepsilon \leq t \leq A\}.
\end{aligned}$$

Après avoir appliqué le théorème des résidus, on fait d'abord $\eta \to 0$, puis $\varepsilon \to 0$ et $A \to \infty$. On obtient à la fin la formule suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\, dx = \frac{\pi e^{i\alpha\pi}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{\substack{z_j \text{ pôle de } \frac{R(z)}{z^\alpha} \\ z_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+}} \mathrm{Res}(\frac{R(z)}{z^\alpha}, z_j).$$

Exemple :

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x(1+x^n)}\, dx = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi\alpha}{n}}.$$

4.12.2 Théorème de Rouché

Une application inattendue du théorème des résidus est le comptage des zéros d'une application holomorphe. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.51 (Rouché)**.** *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert étoilé Ω. Soit γ un lacet simple tracé sur Ω et orienté dans le sens direct. On note par $Z(f, \gamma)$ le nombre de zéros de f situés à l'intérieur de γ comptés avec leurs multiplicités (un zéro d'ordre m compte pour m zéros).*

a) Nous avons que

$$Z(f, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

b) Si $|f-g| < |f|$ sur γ alors $Z(f,\gamma) = Z(g,\gamma)$.

Application : tout polynôme de degré n admet exactement n racines (comptées avec leurs multiplicités).

4.12.3 Théorème de l'application ouverte

Une fonction holomorphe non-constante est ouverte (c'est-à-dire qu'elle envoie les ouverts en des ouverts).

Théorème 4.52 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f une application holomorphe sur Ω qui n'est pas constante. Alors f est ouverte : pour tout U ouvert de Ω nous avons que $f(U)$ est ouvert.*

On ne voit pas le rapport, pourtant ce théorème est une conséquence du théorème de Rouché (donc du théorème des résidus).

Remarque. On montre en fait une affirmation plus précise. Si $f(z_0) = w_0$ et si w est suffisamment proche de w_0, alors dans un petit voisinage de z_0 l'équation $f(z) = w$ admet exactement m racines où m est la multiplicité de z_0 en tant que zéro de $f - w_0$.

4.12.4 Théorèmes d'inversion locale et globale

Les fonctions holomorphes étant de classe C^1 en tant que fonctions de deux variables réelles, on peut se placer dans $\mathbb{R}^2$ et leur appliquer les théorèmes d'inversion locale et globale qu'on a montré dans le cadre des fonctions différentiables (Théorèmes 1.23 et 1.24). Dans le cadre des fonctions holomorphes, les théorèmes d'inversion locale et globales s'énoncent sous la forme suivante.

Théorème 4.53 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Il existe U voisinage ouvert de z_0 et V voisinage ouvert de $f(z_0)$ tels que f est bijective de U dans V et f^{-1} est holomorphe sur V.*

Définissons maintenant les biholomorphismes.

Définition 4.54. *Un biholomorphisme entre deux ouverts Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{C}$ est une application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorphe, bijective et telle que f^{-1} est holomorphe.*

Le théorème de l'application ouverte et le théorème d'inversion locale nous permettent de montrer le théorème d'inversion globale suivant.

Théorème 4.55 (Théorème d'inversion globale)**.** *Soit f une fonction holomorphe et injective sur Ω. Alors f est un biholomorphisme de Ω dans $f(\Omega)$.*

La preuve du théorème d'inversion globale montre le fait remarquable suivant : une fonction holomorphe injective est de dérivée non-nulle. À comparer avec le cas réel où la fonction x^3 est injective mais de dérivée nulle en 0. De même, dans $\mathbb{R}$ une fonction de dérivée non-nulle est injective mais cela n'est plus vrai dans $\mathbb{C}$. En effet, l'exponentielle est de dérivée non-nulle mais elle n'est pas injective puisque périodique.

Application. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle > 1, l'équation $e^{-z} + z - \lambda = 0$ admet exactement une solution z_λ de partie réelle > 0. De plus, z_λ dépend de manière holomorphe de λ.

4.13 Théorème de représentation conforme de Riemann

Une version simplifiée du théorème de représentation conforme de Riemann dit qu'il y a toujours un biholomorphisme entre deux ouverts étoilés différents de $\emptyset$ et de $\mathbb{C}$. La version générale du théorème de représentation conforme de Riemann dit la même chose pour des ouverts simplement connexes. La définition d'un ouvert simplement connexes fait intervenir la notion d'homotopie : il faut que tout lacet soit homotope à un point, c'est-à-dire qu'il puisse être déformé continûment en un point. Tout ça en restant dans l'ouvert bien-entendu. Nous n'allons pas introduire cette complication supplémentaire ici, tout ça est déjà assez compliqué comme cela. Nous donnerons une définition équivalente de la simple connexité sans parler d'homotopie. La notion introduite dans cette définition sera exactement la propriété utilisée dans le théorème de représentation conforme de Riemann.

Définition 4.56. *Un ouvert Ω est dit simplement connexe s'il est connexe et si toute fonction holomorphe non-nulle sur Ω admet un logarithme sur Ω.*

Rappelons qu'un logarithme de f sur Ω est une fonction holomorphe g sur Ω telle que $f = e^g$.

En combinant la proposition 4.14 et le théorème de Cauchy (théorème 4.22) on voit que tout ouvert étoilé est simplement connexe. De manière intuitive, un ouvert simplement connexe est un ouvert d'un seul morceau et sans trou.

La propriété d'être simplement connexe est stable par biholomorphisme.

Proposition 4.57. *Soit Ω un ouvert simplement connexe et f un biholomorphisme de Ω dans Ω'. Alors Ω' est simplement connexe.*

Voici maintenant quelques résultats nécessaires à la preuve du théorème de représentation conforme de Riemann.

Théorème 4.58 (Montel)**.** *Soit Ω un ouvert et f_n une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la suite f_n est bornée sur les compacts de Ω (pour tout K compact de Ω il existe une constante $C(K)$ telle que $|f_n| \leq C(K)$ sur K quel que soit n). Alors il existe une fonction f holomorphe sur Ω et une sous-suite $f_{\varphi(n)}$ qui converge vers f uniformément sur les compacts de Ω.*

Théorème 4.59 (Hurwitz)**.** *Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction holomorphe f. On suppose que toutes les fonctions f_n sont injectives. Alors f est injective ou constante.*

Lemme 4.60 (Schwarz)**.** *Soit $f : D(0,1) \to \overline{D(0,1)}$ une fonction holomorphe qui s'annule en 0. Alors $|f'(0)| \leq 1$ avec égalité si et seulement si f est une rotation.*

Voici enfin l'énoncé du théorème de représentation conforme de Riemann.

Théorème 4.61 (Théorème de représentation conforme de Riemann)**.** *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts simplement connexes non-vides et différents de $\mathbb{C}$. Il existe un biholomorphisme de Ω_1 à Ω_2.*

L'hypothèse que les ouverts ne soient pas $\mathbb{C}$ tout entier ne peut être enlevé. Par exemple, il n'existe pas de biholomorphisme entre $\mathbb{C}$ et le disque unité comme on peut le voir en appliquant le théorème de Liouville.

D'où vient la terminologie "représentation conforme" ? Avec nos notations, ce serait plus naturel de parler de "représentation holomorphe". Par définition, une application conforme est une application qui préserve les angles. Il se trouve que les applications holomorphes sont des applications qui préservent les angles. De plus, elles préservent aussi leur orientation. Plus précisément, si l'on prend deux courbes qui se croisent en un point alors l'angle entre leurs images par une fonction holomorphe (c'est-à-dire l'angle entre les tangentes aux courbes) et son orientation sont les mêmes que pour les courbes de départ. On peut aussi montrer la réciproque : les fonctions holomorphes sont exactement les fonctions qui préservent les angles et leur orientation. Attention, si l'orientation n'est pas préservée alors la fonction n'est pas forcément holomorphe. Par exemple, la fonction $z \mapsto \overline{z}$ est une symétrie donc conserve les angles mais ce n'est pas une fonction holomorphe.

Bibliographie

[1] A. Avez. *Calcul différentiel.* Masson, Paris, 1983.

[2] G. Christol, A. Cot, C.-M. Marle. *Calcul différentiel : Cours et exercices corrigés.* Ellipses, 1998.

[3] J. Melleray. *Calcul intégral et différentiel.* Cours de licence 3e année.

[4] F. Rideau. *Exercices de calcul différentiel.* Hermann, Paris, 1979.

[5] O. Robert. *Calcul différentiel.* Cours de licence 3e année.