Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2016-2017
UE de calcul différentiel et analyse complexe

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - x + 2$. Soient $a, h \in \mathbb{R}$. Développer $f(a+h)$ et montrer que f est différentiable en a.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en a. Montrer que f est différentiable en a et donner la différentielle de f en a en fonction de $f'(a)$.
2. Réciproquement, on suppose f différentiable en a. Montrer que f est dérivable en a et donner $f'(a)$ en fonction de $Df(a)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On rappelle qu'on a les implications suivantes : $(A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C)$ où
(A) Les dérivées partielles de f existent et sont continues au voisinage de a..
(B) f est différentiable en a.
(C) Les dérivées partielles de f existent en a.
À l'aide des fonctions suivantes, montrer que les réciproques sont fausses en général.

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 4. Calculer la différentielle des applications suivantes $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x+y$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 5. On rappelle que la norme L^p d'un vecteur X dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\|X\|_p = (X_1^p + \cdots + X_n^p)^{\frac{1}{p}}$. L'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p$ est-elle différentiable en 0 ? Même question pour $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p^p$? Calculer la différentielle quand elle existe.

Exercice 6. Soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Calculer la différentielle de $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x+y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x-y)$.

Exercice 7. Soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,x) \in \mathbb{R}$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 8. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, $a \in U, v \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de $t \mapsto f(a+tv)$ en $t=0$ en fonction de la différentielle de f en a. Application : $f(x,y) = \exp(x^2 - y^3), a = (0,1), v = (2,0)$.

Exercice 9. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \mathrm{tr}(AB)$. Calculer la différentielle de f en tout point.
À quelle condition Df est-elle surjective ?

Exercice 10. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AB$. Calculer la différentielle de f en tout point. En quels points Df est-elle surjective ? injective ?

Exercice 11. Soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}\,({}^tAA)$. Calculer la différentielle de f en tout point.

Exercice 12. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à la parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$ (où p est une constante non nulle).

Exercice 13. On note det et tr le déterminant et la trace d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la différentielle de det en $X \in M_n(\mathbb{R})$ est l'application $H \mapsto \mathrm{tr}({}^t\overline{X}H)$ où $\overline{X}$ est la comatrice de X.

Exercice 14. On note $C^0([0,1])$ les fonctions continues sur $[0,1]$. Soit $f : \varphi \in C^0([0,1]) \mapsto \int_0^1 \varphi^4(t)dt \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f.

Exercice 15. Soit $f : \varphi \in C^2([0,1]) \mapsto \int_0^1 (\varphi')^2(t) \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f. Caractériser les éléments $\varphi \in C^2([0,1])$ tels que la différentielle Df s'annule en φ.