
Feuille d'exercices n° 2: Fonctions holomorphes, conditions de Cauchy-Riemann

Terminologie. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On emploiera de façon équivalente les termes : f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 , f est dérivable en z_0 . Comme \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension 2), on emploiera le terme f est \mathbb{R} -différentiable en z_0 . Ainsi, une fonction est dérivable en z_0 si et s. si f est \mathbb{R} -différentiable en z_0 et satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann en z_0 .

Exercice 1. Soient $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = \operatorname{Re}(z)$ et $h(z) = \operatorname{Im}(z)$. Montrer que ces fonctions ne sont dérivables en aucun point de \mathbb{C} .

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ si $z \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann à l'origine mais que f n'est pas dérivable en ce point.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(x + iy) = x^3 + iy^3$. En quels points de \mathbb{C} la fonction f est-elle dérivable ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction polynomiale associée à un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est dérivable en tout point de \mathbb{C} et pour tout $z \in \mathbb{C}$, exprimer $g'(z)$ en fonction de f .
2. Montrer que la fonction $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(z)}$ est dérivable en 0 si et s. si $f'(0) = 0$.

Exercice 5. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathbb{R} -différentiable sur l'ouvert $U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

1. Confirmer que f est dérivable en $z = x + iy$ si et s. si (x, y) est un point critique de f .
2. Soit U le plan \mathbb{C} privé des axes réel et imaginaire.
En quels points $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{C} : x + iy \mapsto x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$ sont-elles dérivables ?

Exercice 6. Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . On note \tilde{f} la fonction correspondante de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 . Montrer qu'en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 tel que $f'(x + iy) \neq 0$, la différentielle $D\tilde{f}(x, y)$ est une similitude directe (i.e. composée d'une homothétie et d'une rotation).

Exercice 7. Soit U un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur cet ouvert. Démontrer que chacune des conditions suivantes implique que f est constante.

1. f' est nulle sur U .
2. $\operatorname{Re}(f)$ est constante.
3. $\operatorname{Im}(f)$ est constante.
4. \bar{f} est holomorphe sur U .
5. $|f|$ est constante.

Exercice 8. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{C} . On dit que f est anti-holomorphe sur U si la fonction $z \mapsto f(\bar{z})$ est holomorphe sur l'ouvert conjugué \bar{U} .

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et s. si \bar{f} est anti-holomorphe sur U .
2. Soit U un ouvert tel que $\bar{U} = U$ et soit g une fonction anti-holomorphe sur U . Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes f_1 et f_2 sur U telles que pour tout $z \in U$, $g(z) = \overline{f_1(z)} = f_2(\bar{z})$.

Exercice 9. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert U de \mathbb{C} .

1. Montrer que $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont harmoniques.
On rappelle qu'une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 est harmonique si $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.
2. Soit U le demi-plan ouvert $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Montrer que l'application $g : U \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \ln|z|$ est harmonique. Montrer (en l'explicitant) qu'il existe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur U telle que $\operatorname{Re}(f) = g$.
3. On suppose à présent U étoilé. Démontrer que toute fonction g harmonique sur U est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U . (Considérer $h = \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y}$ et se servir d'une primitive.)