

---

Feuille d'exercices n° 3: Déterminations holomorphes

---

**Exercice 1** (Racine  $p$ -ième). Soit  $p \geq 2$  un entier. Pour  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ , on appelle détermination holomorphe de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$  toute fonction holomorphe  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  telle que :  
pour tout  $z \in U$ ,  $(f(z))^p = z$ .

1. Dans cette question, on suppose que  $0 \in U$ . Montrer qu'il n'y a pas de détermination holomorphe de la racine  $p$ -ième sur  $U$ .
2. Dans cette question, on suppose  $U$  connexe non vide.
  - (a) Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux déterminations holomorphes de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $f_1 = \lambda f_2$ .
  - (b) En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$  alors il en existe exactement  $p$ , en les décrivant.
3.
  - (a) Montrer que s'il existe une détermination holomorphe du log sur  $U$  alors il existe une détermination de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$ .
  - (b) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe  $f$  de  $z \mapsto z^{1/3}$  sur  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  telle que  $f(1) = e^{4i\pi/3}$ . Calculer  $f(i)$  et déterminer  $f(U)$ .
  - (c) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe  $g$  de  $z \mapsto z^{1/2}$  sur  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$  telle que  $g(-1) = i$ . Déterminer  $g(U)$ .
4. Dans cette question on suppose que  $U$  a deux composantes connexes. Combien peut-il y avoir de déterminations de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$  ?

**Exercice 2** (Racine carrée d'une fonction holomorphe). Soit  $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ .

1. Soit  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 1 - z^2$ . Montrer que  $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Cette inclusion est-elle ou non une égalité ?
2. On note  $\log$  une détermination du logarithme définie sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Montrer que la fonction  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $g(z) = e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)}$  est bien définie et holomorphe sur  $U$ . Calculer son carré et sa dérivée.
3. Notons  $V$  le plan complexe privé du segment réel  $[-1, 1]$ . Vérifier que pour  $z \in V$ , on a  $z^{-1} \in U$ . On définit alors  $h : V \rightarrow \mathbb{C}$  par  $h(z) = izg(z^{-1})$ . Montrer que  $h$  est bien définie et holomorphe sur  $V$ . Calculer son carré et sa dérivée.

**Exercice 3** (Déterminations de l'arcsinus). Pour  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ , on appelle détermination holomorphe sur  $U$  de la fonction arcsinus toute fonction holomorphe  $f$  sur  $U$  telle que  $\sin(f(z)) = z$  pour tout  $z \in U$ .

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur  $U$  de arcsinus alors  $-1 \notin U$  et  $1 \notin U$ .
2.
  - (a) Montrer que pour tous  $w, z$  complexes,  $\sin w = z \iff (e^{iw} - iz)^2 = 1 - z^2$ .
  - (b) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Déduire du (a) que les assertions suivantes sont équivalentes :
    - i.  $f$  est une détermination holomorphe sur  $U$  de arcsinus.
    - ii. Il existe  $g$  holomorphe sur  $U$  qui vérifie en tout point les deux relations :
$$g(z) + iz = e^{if(z)} \text{ et } [g(z)]^2 = 1 - z^2.$$
3. Montrer que dans ce cas,  $f'(z) = \frac{1}{g(z)}$  pour tout  $z \in U$ .
4. Soit  $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ . En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une unique détermination  $f$  de arcsinus sur  $U$  telle que  $f(0) = 0$ .