Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021
UE de calcul différentiel et analyse complexe

Feuille d'exercices n° 3: Théorème des accroissements finis

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable. On suppose que $\lim\limits_{\|v\| \to +\infty} \|f(v)\| = +\infty$ et que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $Df(v)$ est injective. Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective.
Soit $a \in \mathbb{R}^2$, on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|f(v) - a\|^2$.

1. Déterminer $Dg(v)$ en tout point v.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un certain point v_0 et que $Dg(v_0) = 0$ puis conclure.

Exercice 2. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ munie de sa topologie usuelle. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x, F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x, y)$. On veut montrer que si f est différentiable en x, y est unique .

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. On suppose que f est différentiable en x. Montrer que $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leq 1$.
2. Soit $y \in F$ tel que $d(x, y) = f(x)$.
   On considère la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f((1 - t)x + ty)$.
   En calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $Df(x)(\frac{x-y}{\|x-y\|}) = 1$ et que $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.
3. En déduire que y est unique.

Exercice 3. On considère $E = l^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\|(u_n)\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est fini. L'espace vectoriel E est alors normé par la norme $\| \ \|_1$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur E, il existe une suite bornée $a = (a_0, a_1, \ldots)$ telle que pour tout $(u_n) \in E$, $L((u_n)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n$.
2. Montrer que la norme $\| \ \|_1$ (vue comme application de E vers $\mathbb{R}$) n'est différentiable en aucun point de E. On pourra raisonner par l'absurde en s'aidant de la question 1.

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que pour tout x, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est dérivable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f'(0)$ existe et est non nulle mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application dérivable. On suppose que $\lim\limits_{x \to b} f'(x)$ existe. Montrer que f se prolonge par continuité en b et que f, ainsi prolongée, est dérivable à gauche en b.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et soit $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer la matrice jacobienne $J_{f,(x,y)}$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et calculer la matrice jacobienne $J_{g,(0,0)}$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \bar{B}((0,0),\rho)$, on a $\|J_{g,(x,y)}\| \leq \frac{1}{2}$.
4. Montrer que g admet un unique point fixe dans la boule $\bar{B}((0,0),\rho)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\cos x - \sin y, \sin x - \cos y)$.

1. Montrer que $\|Df(x,y)\| \leq \sqrt{2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la suite récurennte $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \qquad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$

   converge. Donner l'équation satisfaite par sa limite.