Feuille d'exercices n° 4: Indice, formules de Cauchy

Exercice 1. Soit γ le chemin défini par $\gamma(t) = t + it^2$ pour $0 \leq t \leq 1$. Tracer γ puis calculer $\displaystyle\int_\gamma z^2\, dz$.

Exercice 2. En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re(z)} \geqslant 0$ on a :

$$|e^{bz} - e^{az}| \leqslant (b - a)|z|e^{b\mathrm{Re(z)}}.$$

Exercice 3. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct.
1) Pour $m \in \mathbb{Z}$, que vaut $\displaystyle\int_C z^m\, dz$?
2) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, calculer $\displaystyle\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$.
En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{2n} t\, dt$.
3) Obtenir de façon analogue $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} t\, dt$.

Exercice 4. Soit γ le lacet défini par $\gamma(t) = \cos t + i \sin(3t)$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$.
1) Tracer γ. Décrire informellement (sans preuve !) les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ et les valeurs de l'indice de γ par rapport aux points de ces différentes composantes connexes.
2) Déterminer les valeurs $\mathrm{Ind}(\frac{3}{4}, \gamma)$ et $\mathrm{Ind}(0, \gamma)$ (cette fois-ci en étant précis dans son argumentation).

Exercice 5. Sur chacun des ouverts de $\mathbb{C}$ suivants, y a-t-il ou non une détermination holomorphe du logarithme ? (On note ci-dessous x pour $\mathrm{Re}\, z$ et y pour $\mathrm{Im}\, z$).
1) $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid x^2 \neq y^2\}$.
2) $U_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid y \neq \sqrt{x}\}$. L'ouvert U_2 est-il connexe ? Est-il étoilé ?
3) $U_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |x| \geq 1 \text{ ou } |y| \geq 1\}$.
4) $U_4 = \mathbb{C}^* \setminus \{e^{(1+i)t} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6. Soit γ un chemin, h et φ des fonctions de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. On suppose φ continue et h holomorphe. Pour tout w dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$F(w) = \int_\gamma \varphi(z)h(z + w)\, dz.$$

Montrer que la fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}$:
1) En invoquant un théorème de dérivation sous le signe somme.
2) En utilisant le théorème de Morera.

Exercice 7. Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z}dz$.

Exercice 8. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer $\displaystyle\int_C \frac{dz}{2z^2-5z+2}$.

Exercice 9. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1 et soit $n \geq 1$. Calculer :
1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz$ 2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{z}dz$ 3) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^n}dz$ 4) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}dz$.

Exercice 10. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct et soit P un polynôme dont aucune racine n'est de module 1. De quoi $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$ est-il le nombre ?

Exercice 11. Soit γ l'ellipse d'équation $\displaystyle\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ parcourue dans le sens direct, avec $a, b > 0$. En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

Exercice 12. On note C le cercle unité de $\mathbb{C}$ (qu'on parcourt une fois dans le sens direct dans les intégrales ci-dessous).
Soit $\varphi : C \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que

$$\overline{\int_C \varphi(z)dz} = -\int_C \overline{\varphi(z)}\frac{dz}{z^2}.$$

Soit U un domaine contenant le disque fermé $\bar{D}(0,1)$, soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z_0 \in U \setminus C$.
Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}dz$ est égal à $\overline{f(0)}$ si $|z_0| < 1$ et égal à $\overline{f(0)} - \overline{f(1/\overline{z_0})}$ si $|z_0| > 1$.