Feuille d'exercices n° 5 : Analycité, principe des zéros isolés et du maximum

Exercice 1 (Lemme de Schwarz.)**.** Soit $D = D(0,1)$ le disque unité ouvert et soit f holomorphe sur D. On suppose que : $f(0) = 0$ et $f(D) \subseteq D$.

1. En considérant $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z}$, montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et $|f'(0)| \leq 1$.
2. On suppose de plus que $|f'(0)| = 1$ ou bien qu'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et pour tout $z \in D$, $f(z) = \lambda z$.

Exercice 2. Soit f une fonction entière telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}$. Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soient f une fonction entière et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq P(|z|)$. En utilisant les inégalités de Cauchy, montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $\deg(P)$.

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions entières telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |g(z)|$.

1. Montrer que tout zéro z_0 de g est un zéro de f et que son ordre comme zéro de f est supérieur ou égal à son ordre comme zéro de g.
2. Montrer que f et g sont proportionnelles.

Exercice 5. Soient $R > 0$, $D = D(0,R)$ (disque ouvert), ∂D sa frontière. Soient Ω un domaine contenant $\overline{D}$ et f une fonction holomorphe sur Ω.

1. Montrer que si $f_{|\partial D}$ est constante alors f est constante sur Ω.
2. On suppose que f est non constante et que $|f|_{|\partial D}$ est constante égale à c.
   (a) Montrer que $c \neq 0$ et que pour tout $z \in D$, $|f(z)| < c$.
   (b) En considérant $g : z \mapsto \frac{1}{f(z)}$, montrer que f a au moins un zéro dans D.

Exercice 6. Soit f une fonction entière telle qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad a\mathrm{Re}(f(z)) + b\mathrm{Im}(f(z)) \leq c.$$

En considérant l'application $z \mapsto \exp((a - ib)f(z))$, montrer que f est constante.

Exercice 7. Soit f une fonction entière. On cherche à montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, $|f(z)| = 1$.

(b) Il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = cz^n$.

1. Vérifier l'implication $(b) \Rightarrow (a)$.
2. On suppose la condition (a) satisfaite.
   (a) Soit n l'ordre du zéro de f à l'origine (on convient que $n = 0$ si $f(0) \neq 0$) et soit $g : z \mapsto f(z)/z^n$. Vérifier que g est entière.
   (b) Montrer que la fonction h donnée par $h(z) = \overline{g(1/\overline{z})}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $g(z)h(z) = 1$. En déduire que g est constante et conclure.

Exercice 8. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

1. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que le produit fg soit nul sur Ω. Montrer que l'une des fonctions est nulle sur Ω.
2. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose qu'il existe deux déterminations de la racine carrée de f, notées g_1 et g_2. Montrer que $g_1 = g_2$ ou $g_1 = -g_2$.

Exercice 9.

1. Existe-t-il un voisinage connexe V de 0 et une fonction holomorphe f définie sur V tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad f(1/n) = \frac{1}{2n+1}\,?$$
2. Si une telle fonction existe, est-elle unique ? Autrement dit, si f_1 et f_2 sont deux telles fonctions définies sur un voisinage connexe V de 0, sont-elles égales ?
3. Reprendre les questions 1 et 2 avec la condition : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ f(1/n) = e^{-n}$.

Exercice 10. Déterminer les zéros de la fonction $z \mapsto 1 - \exp(\frac{z}{z-1})$ dans le disque ouvert $D(0,1)$. Cela contredit-il le principe des zéros isolés ?

Exercice 11. On fixe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $a = e^{2i\pi t}$ et on note $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que :
$$\forall z \in U, \quad f(az) = f(z).$$
Montrer que f est constante. Cela reste-t-il vrai si on prend $t \in \mathbb{Q}$?