## Feuille d'exercices n° 5 : Courbes paramétrées et séries entières

**Exercice 1** (Astroïde)**.**

1. Étudier la courbe paramétrée définie par $(x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$.
2. Pour $t \neq 0[\pi/2]$, on note $A(t)$ (respect. $B(t)$) le point d'intersection de la tangente au point de paramètre $t$ avec l'axe des abscisses (respect. des ordonnées). Déterminer la distance $A(t)B(t)$.
3. Calculer la longueur de la courbe (avec $t \in [0; 2\pi]$).

**Exercice 2.** Montrer que la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1,\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1$ possède un unique point double. Déterminer une équation des tangentes en ce point.

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la courbure au point d'abscisse $x$ est $\dfrac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$.

**Exercice 4.** Faire l'étude de la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (\cos(3t), \sin(2t))$. On remarquera qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in [0, \pi/2]$.

---

**Exercice 5.** soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum a_n z^{3n}$,
2. $\sum a_n 3^n z^{2n}$,
3. On suppose désormais $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

**Exercice 6.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1. $\sum (-1)^n \dfrac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
2. $\sum \dfrac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+3}$.
3. $\sum (1 + (-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.
4. $\sum z^{n!}$,
5. $\sum n^n z^{n^2}$.

**Exercice 7.** Déterminer le rayon de convergence, $R$, de $\sum \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

**Exercice 8.** Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

**Exercice 9.** Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

**Exercice 10.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Exercice 11.** Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ et soir $R > 0$. Montrer que pour $n$ suffisamment grand, $P_n$ n'a pas de racinces dans le disque fermé de rayon $R$.

**Exercice 12.** Pour un entier $n \geq 1$, on note $d(n)$ (respect. $s(n)$) le nombre de diviseurs (respect. leur somme) de $n$ qui sont supérieurs à 1. Montrer que les séries entières $\sum d(n) z^n$ et $\sum s(n) z^n$ ont pour rayon de convergence 1.