
Feuille d'exercices n° 5: Théorème des fonctions implicites et courbes paramétrées

---

Exercice 1. Etudier la courbe $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $p = (0, 0)$ et $q = (1, 1)$. On donnera, pour cela, un DL à l'ordre 2 de la fonction implicite trouvée.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et pour tout $x \in I$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$, ainsi que sa surface de niveau 0 dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à cette surface au point $(1, 1, 1)$.
2. Vérifier qu'au voisinage du point $(1, 1, 1)$ cette surface est le graphe d'une fonction $z = g(x, y)$.
3. Écrire le pôlynome de Taylor d'ordre deux de g au point $(1, 1)$. Quelle est la matrice hessienne de g en ce point ?
4. Quelle est la position de la surface par rapport au plan tangent ?

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle de degré au plus d. On le munit de la norme infinie.
Soit $P_0 = c_0 + c_1X + \cdots + c_dX^d$ un polynôme de E ayant une racine $x_0 \in \mathbb{R}$ que l'on supposera simple. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $|a_i - c_i| < r$, le polynôme $P = a_0 + \cdots + a_dX^d$ admet une unique racine simple x_P dans $]x_0 - r; x_0 + r[$ et la fonction $P \mapsto x_P$ est de classe C^1.
Remarque : avec moins de rigueur, on dira que les racines simples dépendent continûment (et même de façon C^1) des coefficients du polynôme.
<u>Indication</u> : On pourra considérer $F : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F(P, x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$.

Exercice 5 (L'équation du troisième degré et discriminants)**.** On note (x, p, q) trois variables réelles. L'équation $x^3 + px + q = 0$ définit-elle x comme fonction implicite de p et q ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que le graphe de f est une courbe paramétrée $\gamma(x) = (x, f(x))$ régulière partout.
2. Montrer que la courbure au point d'abscisse x est $\dfrac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$.

Exercice 7. La *spirale logarithmique* est la courbe paramétrée par $M(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Dessiner la spirale et montrer qu'elle est régulière partout.
2. Si on désigne par $v(t)$ le vecteur vitesse au point $M(t)$, montrer que l'angle entre $\overrightarrow{OM(t)}$ et $v(t)$ est constant ; le déterminer.
3. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, et le determiner, tel que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la longueur de la courbe pour $t \in]-\infty, t_0]$ est égale à $\lambda \cdot \|\overrightarrow{OM(t_0)}\|$.
4. Trouver un paramètre par longueur d'arc $s(t)$ et reparamétrer la spirale par longueur d'arc.
5. Déterminer la courbure en un point quelconque.

Exercice 8. Montrer que la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1,\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1$ possède un unique point double. Déterminer une équation des tangentes en ce point.

Exercice 9. Faire l'étude de la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (\cos(3t), \sin(2t))$. On remarquera qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in [0, \pi/2]$.

Exercice 10. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à la parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$ (où p est une constante non nulle).