Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
UE d'analyse complexe

Feuille d'exercices n° 6: Théorème des résidus

Notations.
Etant donnés trois réels r_0, θ_1, θ_2 tels que $0 \leq r_0$ et $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$, on désigne par $S_{r_0,\theta_1,\theta_2}$ le secteur

$$S_{r_0,\theta_1,\theta_2} = \{re^{i\theta},\, 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi,\, 0 \leq r_0 < r\} \subset \mathbb{C}.$$

On note $\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}$ le paramétrage de l'arc de cercle

$$\gamma_{r,\theta_1,\theta_2} : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C} : t \mapsto re^{it}$$

et $\gamma_r = \gamma_{r,0,2\pi}$ le paramétrage du cercle complet.

Exercice 1. Calculer $I = \int_{\gamma_r} f(z)dz$ dans les cas suivants.

1. $r = 2\,;\ f(z) = \dfrac{5z^2+1}{z(z-1)}$.
2. $r = \frac{3}{2}\,;\ f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+2)}$.
3. $r \neq 1\,;\ f(z) = \dfrac{\exp(1/z)}{z-1}$.

Exercice 2. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\,cost + c\,sint}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*,\ a^2 > b^2 + c^2$$

par la méthode des résidus.
($cost = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ et $sint = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.)

Exercice 3. (Fonctions rationnelles sans pôles sur l'axe réel)

1. On suppose $f : S_{r_0,\theta_1,\theta_2} \to \mathbb{C}$ continue et $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ dans $S_{r_0,\theta_1,\theta_2}$.
   Montrer que $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}} f(z)dz = 0$.
2. Evaluer
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(a+it)^2(b+i\epsilon t)},\ a \neq b \in \mathbb{R}_+^*, \epsilon = \pm 1.$$
   (Intégrer sur le bord d'un demi-disque de diamètre $[-r, r] \subset \mathbb{R}$ et se servir du 1.)
3. Montrer que
   $$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi/n}{sin(\pi/n)},\ n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$$
   (Pour $r > 1$, considérer le lacet obtenu en concaténant le segment $[0, r]$, l'arc $\gamma_{r,0,\frac{2\pi}{n}}$ et le segment $[re^{2i\pi/n}, 0]$ et se servir du 1.)

Dans les exercices 4 et 5, on fixe n nombres complexes $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et on pose $Q(z) = \Pi_{j=1}^n (z - z_j)$.

Exercice 4. (Interpolation polynomiale)
Choisissons $r > 0$ tel que $|z_j| < r$ pour tout j.
Montrer que pour toute $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entière, l'application

$$z \mapsto L(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)} \left(\frac{Q(\zeta) - Q(z)}{\zeta - z} \right) d\zeta$$

est polynomiale de degré $n - 1$ et pour tout $j \in [1, n]$, $L(z_j) = f(z_j)$.

Exercice 5. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application polynomiale.

1. Evaluer $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$.
2. Que vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}$ lorsque $\deg(P) \leq n - 2$?

Exercice 6. (Transformée de Fourier)

1. On considère le secteur $S_{r_0,\theta_1,\theta_2}$ avec $\theta_2 \leq \pi$. On suppose $f : S_{r_0,\theta_1,\theta_2} \to \mathbb{C}$ continue et $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ dans $S_{r_0,\theta_1,\theta_2}$.
   Soit $\xi \in \mathbb{R}^*_-$ et $r > r_0$. Montrer que $|\int_{\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}} f(z)e^{-i\xi z}dz| \leq r \sup_{|z|=r}|f(z)| \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-|\xi| r sint}dt$.
   En déduire $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}} f(z)e^{-i\xi z}dz = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*_-$.
   (Se servir de $sint \geq \frac{2t}{\pi}$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $sint \geq 2 - \frac{2t}{\pi}$ pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.)
2. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}, a \in \mathbb{R}^*$. Evaluer
$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx,\ \xi \in \mathbb{R}^*_-$$
   par la méthode des résidus.
3. Calculer $\int_0^\infty \frac{x\,sinx}{(1+x^2)^2}dx$. (Considérer $z \mapsto \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}$ sur un demi-disque.)

Exercice 7. (Transformée de Fourier (suite))
En intégrant $z \mapsto e^{-z^2/2}$ sur le bord du rectangle de sommets $-r, r, r + i\xi, -r + i\xi$ $(r > 0)$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}dx = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2},\ \xi \in \mathbb{R}.$$

(Pour rappel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$.)

Exercice 8. (Pôle à l'origine)

1. On suppose h holomorphe sur le disque $D(0, \rho), \rho > 0$.
   Montrer que $\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}} h(z)dz = 0$.
2. On suppose g méromorphe sur $D(0, \rho)$, ayant un pôle simple en 0.
   Montrer que $\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}} g(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Res(g, 0)$.
3. Evaluer $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$ par la méthode des résidus.
   (Fixer $R > r > 0$ et intégrer $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ sur le lacet obtenu en concaténant le segment $[-R, -r]$, le demi-cercle $-\gamma_{r,0,\pi}$, le segment $[r, R]$ et le demi-cercle $\gamma_{R,0,\pi}$.)

Exercice 9. Evaluer les deux intégrales suivantes par la méthode des résidus.

1. $\int_0^\infty \frac{cosx}{e^x+e^{-x}}dx$.
   (Faire la liste des pôles de $\frac{e^{iz}}{e^z+e^{-z}}$ et intégrer sur le lacet rectangulaire de sommets $-r, r, r+i\pi, -r+i\pi$, $r > 0$ évitant ces pôles.)
2. $\int_0^\infty \frac{sinx}{e^x-e^{-x}}dx$.
   (Adapter le contour du 1 au cas d'un pôle à l'origine.)