
Feuille d'exercices n° 6 : Classe de Schwartz

Exercice 1. Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ non identiquement nulle et telle que l'on ait $\int_{\mathbf{R}} x^k f(x) dx = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$?

Exercice 2. Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que h admette une primitive dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Exercice 3. Soit $p \in [1, +\infty]$.

1. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L^p(\mathbf{R})$ et que cette inclusion définit une application continue de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $(L^p(\mathbf{R}), \|\cdot\|_p)$.
2. Généralisation de ce résultat à \mathbf{R}^n ?

Exercice 4. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive. On pose $f(x) = e^{-A(x) \cdot x}$. Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Exercice 5. Soit ρ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , à support compact, et telle que $\rho(x) = 1$ pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$. Pour $i \in \mathbf{N}^*$ on pose $\rho_i(x) = \rho\left(\frac{x}{i}\right)$.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Montrer que $(\rho_i f)_{i \in \mathbf{N}^*}$ converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Exercice 6.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer que, quand ε tend vers 0, $x \mapsto \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$ tend vers f' dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.
2. Généralisation de ce résultat à \mathbf{R}^n ?

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On souhaite montrer l'inégalité suivante :

$$\left(\int_{\mathbf{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{\pi}{2} (\|f\|_2)^4 \quad (\text{H})$$

On note $I = \left(\int_{\mathbf{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)$.

1. Montrer que $I = 2\pi \left(\int_{\mathbf{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbf{R}} |f'(x)|^2 dx \right)$
2. En déduire que $I \geq 2\pi \left(\int_{\mathbf{R}} |xf(x)f'(x)| dx \right)^2$.
3. Dans cette question on note $g(x) = |f(x)|^2$.
Montrer que $\int_{\mathbf{R}} |xf(x)f'(x)| dx \geq -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} xg'(x) dx$ et démontrer (H).
4. Que se passe-t-il pour $f: x \mapsto e^{-ax^2}$ (avec $a > 0$) ?
5. Que pensez-vous de l'inégalité (H) dans le cas où $f \in L^2(\mathbf{R})$?

Exercice 8.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

- (a) Montrer que $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + 2n\pi)$ converge normalement sur les compacts; on note g sa limite.
- (b) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 et donner une formule pour g' .
- (c) Montrer que g est 2π -périodique et déterminer sa série de Fourier.
- (d) Prouver l'égalité suivante ("formule sommatoire de Poisson"), valide pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et $t \in [0, 1]$. On pose $g(x) = f(x)e^{-itx}$.

- (a) En appliquant la formule sommatoire de Poisson à g , prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + 2n\pi) e^{-2in\pi t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(t + n) e^{i(t+n)x}$$

- (b) En intégrant cette égalité sur $[0, 1]$ (et en justifiant soigneusement le calcul), retrouver la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$:

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

3. On suppose maintenant que $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et que le support de \hat{f} est contenu dans $[-\pi, \pi]$. Montrer que pour tout réel t on a

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) \operatorname{sin}_c((t - n)\pi)$$

On rappelle que $\operatorname{sin}_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, convenablement prolongée en 0.

Afin d'établir l'égalité ci-dessus, on pourra commencer par appliquer la formule sommatoire de Poisson à \hat{f} , et utiliser (en le justifiant) que pour tout ξ on a

$$\hat{f}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(\xi + 2n\pi)$$