
Feuille d'exercices n° 6 : Séries entières

Exercice 1. soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum a_n z^{3n}$,
2. $\sum a_n 3^n z^{2n}$,
3. On suppose désormais $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1. $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
2. $\sum \frac{n!}{1.3 \ldots (2n+1)} z^{2n+3}$.
3. $\sum (1 + (-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.
4. $\sum z^{n!}$,
5. $\sum n^n z^{n^2}$.

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice 4. Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice 5. Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$,
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$,
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$,
4. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 7. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ et soir $R > 0$. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racinces dans le disque fermé de rayon R.

Exercice 8. Pour un entier $n \geq 1$, on note $d(n)$ (respect. $s(n)$) le nombre de diviseurs (respect. leur somme) de n qui sont supérieurs à 1. Montrer que les séries entières $\sum d(n)z^n$ et $\sum s(n)z^n$ ont pour rayon de convergence 1.

Exercice 9. Soit $f = \sum_n a_n z^n$ une série entière où a_n est la suite de Fibonacci définie par $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ et $a_0 = a_1 = 1$.

1. Montrer que pour z dans le disque de convergence, on a :

$$f(z) = (z^2 + z)f(z) + 1.$$

2. Montrer que le rayon de convergence de f est l'inverse du nombre d'or $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Indication : considérer $d_n = a_{n+1}/a_n$ *;* γ *la racine positive de* $X^2 - X - 1 = 0$ *et étudier la suite* $d_n - \gamma$.