Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
UE d'analyse complexe

Feuille d'exercices n° 7: Dénombrement des zéros, fonctions biholomorphes

---

Autour du théorème de Rouché

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \geq 1$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que l'équation $1 + z + az^n = 0$ a toutes ses racines dans le disque ouvert $D(0,2)$.

Exercice 2. On note P le polynôme $3X^{15} + 4X^8 + 6X^5 + 19X^4 + 3X + 1$. Une vérification fastidieuse mais facile à demander à une machine (algorithme d'Euclide) montre que $\mathrm{PGCD}(P, P') = 1$, on l'admettra.
Montrer que P possède 15 zéros dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$.
Comment se répartissent ces zéros entre le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, le cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$?

Exercice 3. Dans cet exercice, on note C_n le carré $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathcal{R}\mathrm{e}(z)| \leq n\pi \text{ et } |\mathcal{I}\mathrm{m}(z)| \leq n\pi\}$ et ∂C_n sa frontière.

1. (a) Vérifier que pour tout y réel :
$$|\tan(iy)| = |\tanh(y)|\,.$$
   (b) Montrer que pour tout x réel et tout y réel strictement positif, $|\tan(x+iy)| \leq \mathrm{cotanh}(y)$. En déduire que pour tout x réel et tout y réel non nul :
$$|\tan(x+iy)| \leq |\mathrm{cotanh}(y)|.$$
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $z \in \partial C_n$,
$$|\tan z| \leq \mathrm{cotanh}(\pi).$$
2. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et soit $b \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, l'équation $\tan z = az + b$ possède exactement $2n+1$ solutions (comptées avec multiplicité) dans le carré C_n.

Bijections biholomorphes

Ci-dessous, D désigne le disque-unité ouvert.

Exercice 4.

1. Montrer qu'il n'y a pas de bijection biholomorphe de $\mathbb{C}$ sur D. [*Indication : utiliser le théorème de Liouville.*]
2. Montrer que $\mathbb{C}$ est néanmoins homéomorphe à D.

Exercice 5.

1. Expliciter une bijection biholomorphe de D sur le demi-plan $H = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z)\}$.
2. On note Q le quart de plan $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$. Montrer que $z \mapsto z^2$ est une bijection biholomorphe de Q sur H. En déduire une bijection biholomorphe de Q sur D.
3. Soit α un nombre réel avec $0 < \alpha < \pi$. On note S_α le secteur angulaire $0 < \arg(z) < \alpha$. Expliciter une bijection biholomorphe de S_α sur H.
4. On note B la bande $0 < \mathcal{R}\mathrm{e}(z) < \pi$. Expliciter une bijection biholomorphe de B sur H.
5. On note $B^+ = B \cap H$. On se propose de montrer que $z \mapsto -\cos z$ est une bijection biholomorphe de la demi-bande B^+ sur H.
   (a) Vérifier que pour tous x, y réels,
   $$-\cos(x+iy) = -\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y.$$
   (b) En déduire que pour tout $z \in B^+$, $-\cos z \in H$ et que pour $z \in B^+$, $|\cos z| \to +\infty$ quand $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) \to +\infty$.
   (c) Soit w_0 un complexe, Ω un ouvert étoilé, γ un lacet simple tracé dans Ω et orienté dans le sens direct, f une fonction holomorphe définie sur Ω qui ne prend pas la valeur w_0 sur l'image de γ. En utilisant le théorème de Rouché, justifier que le nombre de solutions (comptées avec multiplicité) de l'équation $f(z) = w_0$ à l'intérieur de γ est égale à l'indice de w_0 par rapport au lacet $f \circ \gamma$.
   (d) Conclure, en appliquant le c) à un w_0 arbitraire de H, à $\Omega = \mathbb{C}$, au rectangle γ de sommets 0, π, $\pi + iA$, iA (A désignant un réel strictement positif choisi assez grand) et à la fonction $f : z \mapsto -\cos z$.
6. En réunissant diverses idées introduites aux questions précédentes, expliciter une bijection biholomorphe du demi-disque $D \cap H$ sur le disque D.