Fiche d'exercices n°8

Exercice 1 (Équations de droites et de cercles dans $\mathbb{C}$)**.** Dans la suite on identifie le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère $\Big(0,(1,0),(0,1)\Big)$ avec $\mathbb{C}$ via l'identification $(x,y)\mapsto x+iy$.

1. Soient $\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}$ deux vecteurs d'affixes u,w. Montrer que :
   (a) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires si et s. si $u\overline{w}-\overline{u}w=0$.
   (b) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux si et s. si $u\overline{w}+\overline{u}w=0$.
2. Donner une équation de la forme $\overline{a}z+a\overline{z}=b$ pour une droite D passant par un point d'affixe z_0 et orthogonale à un vecteur d'affixe $u\neq 0$. On exprimera a et b en fonction de u et z_0.
3. Réciproquement, soient $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $b\in\mathbb{R}$. Justifier que l'équation $\overline{a}z+a\overline{z}=b$ définit une droite.
4. Justifier que $b=0$ si et s. si la droite passe par 0.
5. On considère le cercle de centre d'affixe c et de rayon $R>0$. Donner une équation de ce cercle. (*Indication : elle est du type de la question suivante.*)
6. Soient $a\in\mathbb{C},b\in\mathbb{R}$. Montrer que si $|a|^2-b>0$ alors
$$z\overline{z}+\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$$
   est l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de a et b.
   Que se passe-t-il si $|a|^2-b\leq 0$? Que peut-on dire sir $b=0$?

Exercice 2 (Homographie dans $\widehat{\mathbb{C}}$)**.** On considère l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}}$ obtenu en ajoutant à $\mathbb{C}$ un élément, noté par convention ∞. Ainsi, $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.
Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ tel que $ad-bc\neq 0$. Une homographie de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une application

$$\begin{array}{rccl} h: & \widehat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ & z & \mapsto & \begin{cases} a/c & \text{si } z=\infty;\ h(\infty)=\infty \text{ si } c=0,\\ \infty & \text{si } z=-d/c,\\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{sinon.}\end{cases}\end{array}$$

1. Montrer que si $ad-bc$ alors l'application précédente est constante et que si $ad-bc\neq 0$ alors elle est bijective et son application inverse est l'homographie $z\mapsto -\frac{dy-b}{cy-a}$

Par convention, *une droite de* $\widehat{\mathbb{C}}$ est une droite de $\mathbb{C}$ à laquelle on a ajouté le point ∞ ; *un cercle de* $\widehat{\mathbb{C}}$ est un cercle de $\mathbb{C}$. Soit h_0 l'homographie définie par : $h_0(z)=1/z$.

2. Soit D une droite contenant 0. Montrer que $h_0(D)$ est une droite contenant 0.
3. Soit D une droite ne contenant pas 0. Montrer que $h_0(D)$ est un cercle passant par 0.
4. Soit C un cercle tel que $0\notin C$. Montrer que $h_0(C)$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon en fonction de ceux de C.
5. Déduire des questions précédentes que l'image d'une droite ou d'un cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$ par une homographie est une droite ou un cercle.
   Indication : si $c\neq 0$ et $cz+d\neq 0$, remarquer que $\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$.
6. On considère l'homographie h définie par $h(z)=\frac{z-i}{z+i}$.

(a) Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ et de $i\mathbb{R}$ par h.
(b) Idem pour l'image du quadrant $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Exercice 3. Soit $\varphi : z \mapsto \frac{1}{z}$. Déterminer $\varphi(\gamma)$ où :
1) γ est le cercle de centre i et de rayon 1.
2) γ est la droite d'équation $2x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 4. 1) Déterminer l'image de l'axe réel par l'homographie $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.
2) En déduire l'image par f du demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im(z)} < 0\}$
3) Déterminer l'image de la bande $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im(z)} < \pi\}$ par $g(z) = -e^z$.
4) Déduire des questions précédentes une transformation conforme transformant la bande B en le disque unité $D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Exercice 5. Soit $f : z \mapsto \sin(z)$ et $g : z \mapsto \cos(z)$.
1) Trouver l'image par f de la droite d'équation $\{x = \frac{\pi}{2}\}$.
2) Trouver l'image par f du segment $\{-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, y = 0\}$.
3) Trouver l'image par g du segment $\{0 < x < \pi, y = a\}$ avec $a > 0$.

Exercice 6. Soit γ le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer

$$\int_\gamma \overline{z} dz.$$

Exercice 7. Soit γ le circuit dont le support est le carré de sommets $1+i$, $1-i$,$-1-i$ et $-1+i$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_\gamma \frac{z-1}{z} dz.$$

Exercice 8. En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re(z)} \geqslant 0$ on a :

$$e^{bz} - e^{az} \leqslant (b-a)|z|e^{b\mathrm{Re(z)}}.$$

Exercice 9. Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\int_\gamma \frac{z+1}{z} dz$.

Exercice 10. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :
1) $\int_\gamma e^z dz$.
2) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$.
3) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z} dz$
4) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} dz$
5) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2} dz$.

Exercice 11. Soit f une fonction entière telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}$. Montrer que f est constante.