Feuille d'exercices n° 8: Déterminations holomorphes, intégrales complexes

Exercice 1 (Racine carrée d'une fonction holomorphe)**.** Soit U le plan complexe privé des deux demi-droites $[1,+\infty[$ et $]-\infty,-1]$ de l'axe réel.

1. Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2-1$. Montrer que $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.
2. On note log la détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$. Montrer que la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$ est bien définie et holomorphe sur U. Calculer son carré et sa dérivée.
3. Notons V le plan complexe privé du segment réel $[-1,1]$. Vérifier que pour $z \in V$, on a $z^{-1} \in U$. On définit alors $g : V \to \mathbb{C}$ par $g(z) = izf(z^{-1})$. Montrer que g est bien définie et holomorphe sur V. Calculer son carré et sa dérivée.

Corrigé:

1. Supposons par l'absurde que $\varphi(z) = \alpha \in \mathbb{R}_+$ avec $z \in U$. Alors $z^2-1 = \alpha \geq 0$ d'où $z^2 = 1+\alpha$. On en déduit que $z = \pm\sqrt{1+\alpha}$ donc $z \notin U$ car $\sqrt{1+\alpha} \geq 1$ (il s'agit là de la racine carrée classique définie sur $\mathbb{R}_+$). Contradiction.
2. La fonction f est bien définie car si $z \in U$ alors $z^2-1 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$ donc $\log(z^2-1)$ est bien défini pour la détermination du log considérée. La fonction f est holomorphe sur U comme composition de fonctions holomorphes.

   Puis $f(z)^2 = \left(e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}\right)^2 = e^{\log(z^2-1)} = z^2-1$ et $(f^2)' = (z^2-1)' = 2z$. D'où $2ff' = 2z$ donc $f' = z/f = ze^{-\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$. On peut aussi calculer f' en dérivant directement et en utilisant que la dérivée de $\log z$ est toujours $1/z$ quelle que soit la détermination du log utilisée. Remarquons aussi qu'on a toujours $e^{\log z} = z$ mais pas forcément $\log(e^z) = z$ (cette relation est vraie seulement modulo $2\pi i$).
3. Si $1/z \notin U$ alors $1/z = u \in [1,+\infty[\cup]-\infty,-1]$. Donc u est réel et $|u| \geq 1$. Il vient que $z = 1/u$ est réel et $|z| \leq 1$ d'où $z \in [-1,1]$. Donc $z \notin V$. Donc on a bien $z \in V$ implique $1/z \in U$.

   Pour $z \in V$ nous avons donc que $f(1/z)$ est bien définie. Donc g est bien définie et holomorphe sur V comme composition de fonctions holomorphes.

   Puis $g(z)^2 = -z^2f(1/z)^2 = -z^2(\frac{1}{z^2}-1) = z^2-1$. En dérivant on trouve comme au-dessus que $g' = z/g = -\frac{i}{f(1/z)}$.

Exercice 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle détermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus toute fonction holomorphe f sur U telle que $\sin(f(z)) = z$ pour tout $z \in U$.

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de arcsinus alors $-1 \notin U$ et $1 \notin U$.
2. Soit U un ouvert de C ne contenant ni 1 ni -1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) f est une détermination holomorphe sur U de arcsinus.
   (b) Il existe g holomorphe sur U telle que $g(z)^2 = 1-z^2$ et $e^{if(z)} = iz + g(z)$ pour tout $z \in U$.
3. Montrer que dans ce cas, $f'(z) = \frac{1}{g(z)}$ pour tout $z \in U$.
4. Soit $U = \mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$. Montrer qu'il existe une unique détermination f de arcsinus sur U telle que $f(0) = 0$.

Corrigé:

1. Soit f une détermination holomorphe de l'arcsinus sur U : $\sin f(z) = z$. En dérivant il vient $f' \cos f = 1$ donc $\cos f$ ne s'annule jamais. Donc $\sin f \neq \pm 1$ partout sur U (on rappelle que la relation $\sin^2 + \cos^2 = 1$ reste vraie sur $\mathbb{C}$), d'où $z \neq \pm 1$ partout sur U. C'est-à-dire $\pm 1 \notin U$.
2. On rappelle que $\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$. On a donc $\sin f = z$ si et seulement si
$$2iz = e^{if} - e^{-if}.$$
(a) $\Rightarrow$ (b)
On pose $g = e^{if} - iz$. Alors g est bien holomorphe et
$$g^2 = e^{2if} - 2ize^{if} - z^2 = e^{2if} - (e^{if} - e^{-if})e^{if} - z^2 = 1 - z^2.$$
(b) $\Rightarrow$ (a)
On a $g = e^{if} - iz$ et $g^2 = 1 - z^2$ donc
$$1 - z^2 = (e^{if} - iz)^2 = e^{2if} - 2ize^{if} - z^2$$
D'où $1 = e^{2if} - 2ize^{if}$ ce qui implique $2iz = e^{if} - e^{-if}$. Donc $\sin f = z$.
3. On a
$$g = e^{if} - iz = e^{if} - \frac{e^{if} - e^{-if}}{2} = \frac{e^{if} + e^{-if}}{2} = \cos f.$$
On a déjà vu à la première question que $f' \cos f = 1$ donc $f'g = 1$.
4. Montrons d'abord l'existence de f. L'exercice 1 nous dit qu'il existe une détermination holomorphe de $\sqrt{1 - z^2}$ sur U. On la note par g. On a donc g holomorphe sur U et $g^2 = 1 - z^2$. En particulier $g(0)^2 = 1$ donc $g(0) = \pm 1$. Or $-g$ est aussi une détermination holomorphe de $\sqrt{1 - z^2}$ sur U. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que $g(0) = 1$ (si $g(0) = -1$ on travaille avec $-g$).

   On remarque ensuite que $g + iz \neq 0$ partout. En effet, dans le cas contraire on aurait $g = -iz$ donc $g^2 = (-iz)^2 = -z^2 \neq 1 - z^2$. De plus, U est un ouvert étoilé (par rapport à l'origine). Or on sait par le cours que si h est une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé qui ne s'annule pas, alors $\log h$ admet une détermination holomorphe sur cet ouvert. En appliquant ce résultat on peut dire que $\log(iz + g)$ admet une détermination holomorphe sur U. On pose alors $f_0 = -i \log(iz + g)$. Nous avons que f_0 est holomorphe sur U, que $e^{if_0} = iz + g$ et $g^2 = 1 - z^2$. Par la question 2 on en déduit que f_0 est une détermination holomorphe de l'arcsinus.

   Il reste à voir si $f_0(0) = 0$. Comme $g(0) = 1$ nous avons que $e^{if_0(0)} = g(0) = 1$. Donc $if_0(0) = 2n\pi i$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $f_0(0) = 2n\pi$. Posons enfin $f = f_0 - 2n\pi$. Alors f est holomorphe sur U, $f(0) = 0$ et $\sin f = \sin(f_0 - 2n\pi) = \sin f_0 = z$. Donc f est une détermination de arcsinus sur U telle que $f(0) = 0$.

   On montre maintenant l'unicité de f. Soient f_1 et f_2 deux déterminations de arcsinus sur U telles que $f_1(0) = f_2(0) = 0$. On applique la question 2 : il existe g_1 et g_2 tells que $g_1^2 = g_2^2 = 1 - z^2$ et $e^{if_1} = iz + g_1$, $e^{if_2} = iz + g_2$. En particulier $g_1(0) = e^{if_1(0)} = 1$. De même $g_2(0) = 1$ donc $(g_1 - g_2)(0) = 0$.

   Puis $g_1^2 = g_2^2$ implique $(g_1 - g_2)(g_1 + g_2) = 0$. Donc pour tout z nous avons $(g_1 - g_2)(z) = 0$ ou $(g_1 + g_2)(z) = 0$. Et on ne peut pas avoir les deux en même temps, En effet, cela voudrait dire $g_1(z) = g_2(z) = 0$ en un point z ce qui est impossible car $g_1(z)^2 = 1 - z^2 \neq 0$. On en conclut que $(g_1 - g_2)(z) = 0$ si et seulement si $(g_1 + g_2)(z) \neq 0$. Donc $(g_1 - g_2)^{-1}(0) = (g_1 + g_2)^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Comme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est ouvert, il vient que $(g_1 + g_2)^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ est ouvert donc $(g_1 - g_2)^{-1}(0)$ est ouvert. Mais c'est en même temps fermé puisque $g_1 - g_2$ est continue et les zéros d'une fonction continue forment un ensemble fermé. C'est aussi non-vide puisqu'il contient 0. Or U est connexe (même étoilé), donc nécessairement $(g_1 - g_2)^{-1}(0) = U$, c'est-à-dire $g_1 = g_2$ partout.

   Par la question 3 on sait que $f_1' = \frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_2} = f_2'$ donc $(f_1 - f_2)' = 0$ donc $f_1 - f_2$ est constant. Or $f_1 - f_2$ s'annule en 0, donc $f_1 = f_2$ partout.

Exercice 3. Trouver l'erreur dans : $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Corrigé: La relation $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$ n'a pas de sens. Déjà la racine n'est pas uniquement définie, c'est unique seulement à un signe près. Il suffit donc de changer le signe d'une des racines pour que ce ne soit plus une égalité.

De plus, on ne peut pas non plus affirmer que $\sqrt{1} = 1$ puisque ça peut être -1 aussi.

Exercice 4. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^z.

Corrigé: Il faut comprendre $z^z = e^{z \log z}$ où log est une certaine détermination du logarithme. Nous avons que $\log z = \ln|z| + i\theta$ où θ est l'argument de z module 2π. Choisir θ revient à choisir la détermination holomorphe du logarithme. En notant aussi $z = x + iy$, nous avons

$$z^z = e^{z \log z} = e^{(x+iy)(\ln|z|+i\theta)} = e^{x\ln|z|-y\theta} e^{i(y\ln|z|+x\theta)}.$$

Donc

$$Re(z^z) = e^{x\ln|z|-y\theta} \cos(y\ln|z| + x\theta)$$

et

$$Im(z^z) = e^{x\ln|z|-y\theta} \sin(y\ln|z| + x\theta).$$

On constate que cela dépend du choix de θ, donc du choix de la détermination du log. On ne peut pas définir z^z comme fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 - 1$. Soit $I_k = \displaystyle\int_{\gamma_k} f(z)dz$ où $\gamma_1(t) = t + it^2$ avec $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = e^{t+it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_3(t) = \cos(t) + i\sin(2t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.
Montrer que $I_1 = -5/3 - i/3$, $I_2 = e^{6\pi}/3 - e^{2\pi} + 2/3$, $I_3 = 0$.

Corrigé: On peut appliquer directement la définition des intégrales curvilignes

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

où $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Le produit $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ doit être compris comme produit de nombres complexes. Ce serait instructif de faire vous-mêmes ce calcul.

Mais dans ce cas il est plus rapide d'utiliser la primitive et la formule suivante

$$\int_\gamma g'(z)\,dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Ici $f = z^2 - 1$ donc $g = \frac{z^3}{3} - z$ convient. Alors

$$I_1 = g(\gamma_1(1)) - g(\gamma_1(0)) = g(1+i) - g(0) = \frac{(1+i)^3}{3} - (1+i) = -\frac{5}{3} - \frac{i}{3},$$

$$I_2 = g(\gamma_2(2\pi)) - g(\gamma_2(0)) = g(e^{2\pi}) - g(1) = \frac{e^{6\pi}}{3} - e^{2\pi} + \frac{2}{3}$$

et

$$I_3 = g(\gamma_3(2\pi)) - g(\gamma_3(0)) = g(1) - g(1) = 0.$$

Exercice 6. Montrer que $\displaystyle\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z}dz = \frac{\ln(5)}{2} + i(\arctan(3) - \frac{\pi}{4})$.

Corrigé: Comme dans l'exercice précédent, on peut appliquer directement la définition des intégrales curvilignes

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

On peut faire le calcul avec des intégrales élémentaires sur $\mathbb{R}$ (faites vous-mêmes ce calcul). Mais comme dans l'exercice précédent, il est plus rapide d'utiliser la primitive et la formule

$$\int_\gamma g'(z)\,dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Mais dans ce cas c'est un peu plus compliqué car la primitive de $\frac{1}{z}$ est le logarithme et il faut en choisir une détermination qui soit définie sur le chemin γ. Ici on peut choisir la détermination principale du logarithme, celle qui prend l'argument de $-\pi$ à π, car le segment $[1, 2+i]$ n'intersecte pas $\mathbb{R}_-$. Nous considérons

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z), \qquad -\pi < \theta < \pi.$$

Nous avons donc

$$\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z}dz = \log(2+i) - \log(1) = \log(2+i) = \ln|2+i| + i\arg(2+i) = \ln\sqrt{5} + i\arctan\frac{1}{2}.$$

Exercice 7. Pour $r > 0$, soit $\gamma_r : [-\pi/2;\pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Calculer $\lim\limits_{r\to+\infty} \displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz$.

Corrigé: On ne peut pas calculer cette intégrale, nous allons l'estimer. Par définition

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-re^{it}}}{r^2e^{2it}} rie^{it}\,dt = \frac{i}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-re^{it}}e^{-it}\,dt$$

d'où

$$\Big|\int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz\Big| = \frac{1}{r}\Big|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-re^{it}}e^{-it}\,dt\Big| \le \frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |e^{-re^{it}}e^{-it}|\,dt = \frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |e^{-re^{it}}|\,dt.$$

Or $|e^{-re^{it}}| = |e^{-r\cos t - ri\sin t}| = e^{-r\cos t} \le 1$ pour tout $t \in [-\pi/2;\pi/2]$. On conclut que

$$\Big|\int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz\Big| \le \frac{\pi}{r} \to 0$$

quand $r \to \infty$. Donc

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz = 0.$$

Exercice 8. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct.
Calculer $\displaystyle\int_C (z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{1}{z}dz$ avec $n \in \mathbb{N}$. On pensera à utiliser la formule du binôme pour développer $(z+\frac{1}{z})^{2n}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}(t)dt$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n}(t)dt$.
Déterminer également les valeurs de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n+1}(t)dt$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n+1}(t)dt$.

Corrigé: On commence par remarquer que pour tout $k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ nous avons que $\int_C z^k\,dz = 0$. En effet, z^k admet une primitive qui est $\frac{z^{k+1}}{k+1}$ et l'intégrale de la dérivée d'une fonction holomorphe sur une courbe fermée est nulle. Pour calculer $\int_C (z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{1}{z}dz$ on développe $(z+\frac{1}{z})^{2n}$ avec le binôme de Newton et on cherche le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans l'intégrande $(z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{1}{z}$. Ce coefficient est $\binom{2n}{n}$, donc

$$\int_C (z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{1}{z}dz = \binom{2n}{n}\int_C \frac{1}{z}\,dz$$

Par définition de l'intégrale curviligne on a et en utilisant la paramétrisation de C donnée par $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[-\pi,\pi]$

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{e^{it}}ie^{it}\,dt = 2\pi i.$$

Donc

$$\int_C (z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{1}{z}dz = \binom{2n}{n}2\pi i.$$

En revenant maintenant à la définition de l'intégrale curviligne, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n}2\pi i = \int_C (z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{1}{z}dz = \int_\gamma (z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{1}{z}dz &= \int_{-\pi}^{\pi}(e^{it}+\frac{1}{e^{it}})^{2n}\frac{1}{e^{it}}ie^{it}\,dt\\ &= i\int_{-\pi}^{\pi}(e^{it}+e^{-it})^{2n}\,dt = i\int_{-\pi}^{\pi}(2\cos t)^{2n}\,dt\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t)^{2n}\,dt = \binom{2n}{n}\pi 2^{1-2n}.$$

L'intégrale avec le sinus est égale à celle avec le cosinus en faisant le changement de variables $t=\frac{\pi}{2}-s$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin t)^{2n}\,dt = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(\sin(\frac{\pi}{2}-s))^{2n}(-1)\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos s)^{2n}\,ds = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos s)^{2n}\,ds = \binom{2n}{n}\pi 2^{1-2n}.$$

Les intégrales avec les puissances $2n+1$ sont nulles. En effet, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n+1}(t)dt=0$ car l'intégrande est impaire. L'intégrande avec cosinus est égale à celle avec sinus comme au-dessus.